# UNIVERSIDADE DE LISBOA
# INSTITUTO DE EDUCAÇÃO

# Capacidade de generalização em sequências crescentes com estruturas pictóricas em alunos de 4.º ano

**Gonçalo Teixeira da Silva Cordeiro**

**MESTRADO EM EDUCAÇÃO**

**DIDÁTICA DA MATEMÁTICA**

**Trabalho de Projeto orientado por:**
**Professora Doutora Neusa Branco**
**Professor Doutor João Pedro da Ponte**

**2020**

# Resumo

Este estudo tem como principal objetivo compreender o contributo de uma proposta pedagógica para o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos de 4.º ano, que segue uma abordagem de ensino exploratório e envolve a exploração de tarefas com sequências pictóricas crescentes que diferem nos elementos pictóricos que as constituem na estrutura matemática subjacente à sequência numérica que se associa à sequência pictórica. O estudo tem como base uma metodologia qualitativa e de cariz interpretativo. Nesta experiência, assumo simultaneamente o papel de professor e de investigador. Para além da observação participante na sala de aula, pelo meio da transcrição dos registos áudio e vídeo e da construção de diário de bordo, a recolha de dados é realizada também através da análise documental dos registos produzidos pelos treze pares de alunos que participaram nesta investigação.

Os resultados do estudo sugerem que estes alunos, ao longo do seu percurso escolar, não exploraram de uma forma sequenciada, orientada e com objetivos definidos este tipo de estrutura matemática. Os resultados mostram também que os alunos, numa fase inicial do estudo, sentem necessidade em recorrer a representações ativas, passando, progressivamente, a utilizar representações icónicas e, nas últimas tarefas, mais alunos utilizam representações simbólicas. Os participantes utilizam diversas estratégias construtivas, nomeadamente, representação e contagem, aditiva e objeto inteiro. Muitos alunos recorreram insistentemente às tabelas e respetivas estruturas para sistematizar a informação recolhida e o raciocínio, privilegiando o uso da estratégia aditiva. Verifica-se também, que ao longo da exploração das diferentes tarefas, os momentos de discussão coletiva assumiram um papel fundamental no desenvolvimento do pensamento algébrico, observando-se, gradualmente, uma maior tendência no uso da estratégia decomposição dos termos. Em relação à capacidade de generalizar, muitos alunos privilegiam o uso de estratégias de generalização de natureza aritmética, manifestando dificuldade em usar a linguagem algébrica para representar generalizações. Apesar das dificuldades apresentadas, os resultados obtidos revelam que este estudo, contribuiu para o desenvolvimento do pensamento algébrico, especificamente na capacidade de generalizar usando representações simbólicas.

Palavras-chave: Estratégias de generalização, sequências pictóricas crescentes, representações, resultados, pensamento algébrico.

# Abstract

This project aims at understanding how 4th grade students analyse, represent and what are the generalisation strategies that are used in tasks that entail increasing sequences within a linear mathematical structure, but with different pictorial arrangements and representations, namely the way they determine the next term or the nth term, the order of a term and how they express their generalisations. This study was carried out using a qualitative methodology of interpretative nature. In this experience, I take on both the role of teacher and researcher. Apart from the participant observation in the classroom, by means of audio and video transcripts and through the keeping of a logbook, data collection was also made by analysing the records produced by the thirteen pairs of students that participated in this research. The results of this study suggest that, during previous studies, these students had not handled this type of mathematical structures in a sequenced, guided and goal-oriented way. These results also show that students feel the need to resort to active representations in the initial tasks, eventually progressing to using pictorial representations and, later on, more students are able to handle symbolic representations. The participants make use of many constructive strategies, namely representation and counting, additive, and whole object. Many students resorted insistently to tables and their respective structure so as to systematise the collected data and mathematical reasoning, favouring the use of the additive strategy. We can also report that, throughout the completion of the tasks, the moments of collective discussion took on a fundamental role in the development of the algebraic thinking to the point where we could observe a gradual tendency to make use of the number decomposition strategy. With respect to generalisation skills, many students favour the use of generalisation strategies of arithmetic nature, showing difficulty in using algebraic language to represent them. Despite these difficulties, the results obtained show that this study contributed to the development of students' algebraic reasoning, especially regarding the skill of generalising symbolically, as a way of expressing generalisations.



Keywords: generalisation strategies, pictorial increasing sequences, representations, results, algebraic reasoning.

## Agradecimentos

A todos aqueles que contribuíram para o desenvolvimento e conclusão deste projeto, quero manifestar o meu agradecimento.

Aos meus orientadores, Professora Doutora Neusa Branco e Professor Doutor João Pedro da Ponte, pela paciência, apoio e orientação e ensinamentos, aspetos fundamentais para a concretização deste projeto. Pela disponibilidade e interesse com que o seguiram e pelos comentários e sugestões, contributos determinantes na construção do mesmo.

Aos colegas do Mestrado em Educação do Instituto de Educação pelo apoio e companheirismo.

Aos alunos intervenientes neste estudo e à professora Sílvia, pela disponibilidade e colaboração.

Aos meus colegas de trabalho, que me apoiaram desde o início deste projeto.

À minha família e amigos, por todo o incentivo e carinho que me deram.

Aos meus pais e sogros, pela ajuda, incentivo, disponibilidade e carinho que me foram dado ao longo do tempo que durou este estudo.

À Catarina, pelo apoio incondicional, pela compreensão, pela presença permanente, por não me deixar desistir e pelo amor que me deu.

À Leonor e ao João, pelo tempo que lhes "roubei" e pela força e carinho que me deram nos momentos mais difíceis.

À minha querida mãe pela força e esperança que me consegue transmitir neste momento delicado da sua vida.

## Índice


**Capítulo 1 – INTRODUÇÃO ........................................................................1**

1.1. Motivações pessoais.........................................................................1
1.2. A Álgebra e o pensamento algébrico nos anos iniciais...................................3
1.3. Objetivo e questões do estudo..........................................................6
1.4. Organização geral do projeto...........................................................8

**Capítulo 2 –SEQUÊNCIAS PICTÓRICAS CRESCENTES E O PENSAMENTO ALGÉBRICO.............................................................9**

2.1. Exploração de sequências pictóricas e desenvolvimento do pensamento algébrico...............................................................................................9
2.2. Generalização em sequências pictóricas crescentes......................................14
2.3. Representações matemáticas em tarefas que promovam a exploração de sequênciaspictóricas crescentes ………………….…………….18
2.4. Estratégias utilizadas pelos alunos na exploração de tarefas que envolvem sequências pictóricas crescentes …………..…………………………23
2.5. Dificuldades dos alunos na exploração de sequências pictóricas crescentes..26

**Capítulo 3 – PROPOSTA PEDAGÓGICA..............................................................29**

3.1. Contextualização e objetivos de aprendizagem............................................29
3.2. Participantes ………………………………………………………..………35
3.2. Tarefas ........................................................................................35
3.3. Dinâmica da sala de aula.................................................................40

**Capítulo 4 – METODOLOGIA........................................................................44**

4.1. Opções metodológicas ...................................................................44
4.2. Aspetos de natureza ética……………………………...…………………48
4.3. Recolha de dados...........................................................................49
4.4. Análise dos dados..........................................................................51

**Capítulo 5 –A EXPERIÊNCIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM ………………..53**

5.1. Sequência "Pá com fósforos" (Tarefa 1)........................................................54
5.1.1. Características da tarefa...............................................................................54
5.1.2. Estratégias utilizadas pelos alunos............................................................ 54
5.1.3. Generalizações apresentadas pelos alunos................................................66
5.1.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos.....................................................69
5.1.5. Reflexão........................................................................................................71
5.2. Exploração da Sequência em "S" (Tarefa 2).................................................72
5.2.1. Características da tarefa..............................................................................72
5.2.2. Estratégias utilizadas pelos alunos............................................................ 73
5.2.3. Generalizações apresentadas pelos alunos................................................82
5.2.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos.....................................................84
5.2.5. Reflexão........................................................................................................85
5.3. Exploração da Sequência "Árvores construídas com fósforos" (Tarefa 3)...........................................................................................................86
5.3.1. Características da tarefa...............................................................................86
5.3.2. Estratégias utilizadas pelos alunos............................................................ 87
5.3.3. Generalizações apresentadas pelos alunos................................................93
5.3.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos.....................................................95
5.3.5. Reflexão........................................................................................................96
5.4. Exploração da Sequência "Figuras que representam degraus" (Tarefa 4)...........................................................................................................98
5.4.1. Características da tarefa...............................................................................98
5.4.2. Estratégias utilizadas pelos alunos.............................................................99
5.4.3. Generalizações apresentadas pelos alunos..............................................106
5.4.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos...................................................108
5.4.5. Reflexão......................................................................................................109
5.5. Exploração da Sequência "Letras "A" com fósforos" (Tarefa 5)................110
5.5.1. Características da tarefa.............................................................................110
5.5.2. Estratégias utilizadas pelos alunos...........................................................111
5.5.3. Generalizações apresentadas pelos alunos..............................................121
5.5.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos...................................................124
5.5.5. Reflexão......................................................................................................126
5.6. Exploração da Sequência "Figuras que representam a letra "L" (Tarefa 6).........................................................................................................127
5.6.1. Características da tarefa.............................................................................127
5.6.2. Estratégias utilizadas pelos alunos.......................................................... 128
5.6.3. Generalizações apresentadas pelos alunos..............................................134
5.6.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos...................................................135
5.6.5. Reflexão......................................................................................................137

**Capítulo 6 – CONCLUSÃO**........................................................................**139**

6.1. Síntese do estudo.........................................................................139
6.2. Discussão dos resultados……………………….……..………………142
6.2.1. Aspetos gerais………………………………………………………..142
6.2.2. Paralelismo entre as estratégias utilizadas pelos alunos
em sequências com a mesma estrutura linear …………………………...……146
6.2.3. Estratégias utilizadas pelos alunos em sequências com
diferente estrutura linear……………………………………………………151
6.2.4. Natureza das generalizações…………………………………………152
6.3. Dificuldades manifestadas……………………………………………..154
6.4. Recomendações para a sala de aula e construção de tarefas……………..155
6.5. Limitações do estudo…………………………………………………..156
6.6. Reflexão final……………………………………………………….....157

**REFERÊNCIAS**..........................................................................................**159**

**ANEXOS**....................................................................................................**166**

## Índice de Figuras

Figura 1 - Termos associados ao conceito *padrão* (adaptado de Vale, 2009) ……..…..16

Figura 2 – Conexões importantes entre representações matemáticas
(NCTM, 2017) ……………………………………………………………...……18

Figura 3 – Sequência pictórica,Tarefa 1 ……………………………………......…54

Figura 4 - Representação ativa, Grupo 3, Tarefa 1, Questão 1.1 ………………...……55

Figura 5 - Representação ativa, Grupo 12, Tarefa 1, Questão 1.1. ……………………55

Figura 6 - Representação icónica, Grupo 1, Tarefa 1, Questão 1.1. ………………….55

Figura 7 - Representação icónica, Grupo 13, Tarefa 1, Questão 1.1. …………………55

Figura 8 - Representação icónica, Grupo 4, Tarefa 1, Questão 1.1. ………………..…56

Figura 9 - Estratégia aditiva, Grupo 10, Tarefa 1, Questão 1.1. ……………………….56

Figura 10 - Estratégia representação e contagem, Grupo 7,
Tarefa 1, Questão 1.2. …………………………………………………….………....57

Figura 11 - Estratégia aditiva, Grupo 11, Tarefa 1, Questão 1.2. ……………………..58

Figura 12 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 1,
Tarefa 1, Questão 1.3. ……………………………………………………….…..… .58

Figura 13 - Estratégia aditiva, Grupo 13, Tarefa 1, Questão 1.3. ……………………..59

Figura 14 - Estratégia aditiva, Grupo 1, Tarefa 1, Questão 1.4. e 1.5. ……………..….60

Figura 15 - Estratégia aditiva, Grupo 5, Tarefa 1, Questão 1.4. ……………………..……61

Figura 16 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2,
Tarefa 1, Questão 1.4. ……………………………………..……………………...61

Figura 17 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 12,
Tarefa 1, Questão 1.4. ……………………………………………………………….61

Figura 18 - Estratégia objeto inteiro, Grupo 4, Tarefa 1, Questão 1.4. ………………. 61

Figura 19 , Estratégia aditiva, Grupo 10, Tarefa 1, Questão 1.5. ……………..………63

Figura 20 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2,
Tarefa 1, Questão 1.5………………………………………………………..……..…64

Figura 21 - Estratégia aditiva, Grupo 5, Tarefa 1, Questão 1.6. ………………………64

Figura 22 Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2,
Tarefa 1, Questão 1.6. …………………………………………………………………65

Figura 23 - Estratégia representação e contagem, Grupo 7,
Tarefa 1, Questão 1.6.……………………………………………………..………65

Figura 24 - Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos
termos, Grupo 5, Tarefa 1, Questão 1.7. ………………………………………………67

Figura 25 - Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos
termos, Grupo 10, Tarefa 1, Questão 1.7. ....................................................................67

Figura 26 - Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos
termos, Grupo 12, Tarefa 1, Questão 1.7.1 ……………………………………..….…67

Figura 27 - Generalização algébrica factual, Estratégia decomposição dos termos,
Grupo 9, Tarefa 1, Questão 1.7..........................................................................................68

Figura 28 - Generalização aritmética, Estratégia aditiva, Grupo 3, Tarefa 1,
Questão 1.7.......................................................................................................................67

Figura 29 - Generalização aritmética, Estratégia aditiva, Grupo 8, Tarefa 1,
Questão 1.7……………………………………………………………………..……68

Figura 30 - Sequência pictórica,Tarefa 2. ……………………………………..………72

Figura 31 - Registo da lei de formação, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.1. ……………73

Figura 32 - Identificação das partes constituintes nos termos,
Grupo 8, Tarefa 2, Questão 2.1………………………………...……………………74

Figura 33 - Estratégia aditiva no preenchimento da tabela, Grupo 6, Tarefa 2,
Questão 2.3. ………………………………………………………………………….75

Figura 34 -.Estratégia decomposição dos termos no preenchimento da tabela,
Grupo 1, Tarefa 2, Questão 2.3. ………………………………………………………75

Figura 35 - Figura 35. Cálculo para a figura 5, , Grupo 6, Tarefa 2, Questão 2.3. ….…77

Figura 36 - Estratégia aditiva para o 15.º termo, Grupo 3, Tarefa 2, Questão 2.4…..…77

Figura 37 - Estratégia aditiva para o 15.º termo, Grupo 8, Tarefa 2, Questão 2.4……..78

Figura 38 - Estratégia de decomposição dos termos para o 15.º termo, Grupo 2,
Tarefa 2, Questão 2.4. ……………………………………………………………….…78

Figura 39 - Estratégia de objecto inteiro para o 30.º termo, Grupo 3, Tarefa 2, Questão 2.5…………………………………………………………………..……79

Figura 40 - Estratégia de objecto inteiro para o 30.º termo, Grupo 7, Tarefa 2, Questão 2.5……………………………………………………………………….…79

Figura 41 - Estratégia aditiva para o 30.º termo, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.5. ………………………………………………………………..…….80

Figura 42 - Estratégia decomposição dos termos para o 30.º termo, Grupo 4, Tarefa 2, Questão 2.5. ……………………………………………...…….80

Figura 43 - Estratégia decomposição dos termos para o 30.º termo, Grupo 5, Tarefa 2, Questão 2.5. ……………………………………………..……..80

Figura 44 - Estratégia aditiva para o raciocínio inverso, Grupo 6, Tarefa 2, Questão 2.6. ……………………………………………………….…...…81

Figura 45 - Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio inverso, Grupo 4, Tarefa 2, Questão 2.6. ……………………………………………………81

Figura 46 - Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio inverso, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.6. ……………………………………………..……82

Figura 47 - Generalização aritmética, Estratégia aditiva para a generalização, Grupo 3, Tarefa 2, Questão 2.7. ……………………………………………...………83

Figura 48 - Generalização algébrica factual, Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 9, Tarefa 2, Questão 2.7. ………..………….83

Figura 49 - Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.7 …………………..83

Figura 50 - Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2. ……………..…..…84

Figura 51 –Três primeiros termos da sequência pictórica da tareda 3. …………..……87

Figura 52 - Registo da lei de formação, Grupo 8, Tarefa 3, Questão 3.1. …………….87

Figura 53 - Registo da lei de formação, Grupo 13, Tarefa 3, Questão 3.1. …..……….88

Figura 54 - Estratégia decomposiçãodos termos próximos, Grupo 2, Tarefa 3, Questão 3.2. ……………………………………………………88

Figura 55 - Estratégia decomposição dos termos para os termos próximos, Grupo 13, Tarefa 3, Questão 3.2. ……………………………………………….89

Figura 56 –Estratégia aditiva para os termos próximos, Grupo 4,
Tarefa 3, Questão 3.2. ……………………………………………………………...…….89

Figura 57 - Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 3,
Tarefa 3, Questão 3.3. ……………………………………………………………………89

Figura 58 - Estratégia de decomposição dos termos para os termos distantes,
Grupo 13, Tarefa 3, Questão 3.3. ……………………………………………………..90

Figura 59 - . Estratégia objeto inteiro para os termos distantes,
Grupo 1, Tarefa 3, Questão 3.3. ……………………………………………..……..90

Figura 60 - Estratégia representação e contagem para os termos distantes,
Grupo 6, Tarefa 3, Questão 3.3. ……………………………………………...…91

Figura 61 - Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 8,
Tarefa 3,Questão 3.4. ……………………………………………………………………91

Figura 62 - Estratégia objeto inteiro para os termos distantes,
Grupo 9, Tarefa 3, Questão 3.4. …………………………………………..…………92

Figura 63 - Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio inverso,
Grupo 12, Tarefa 3, Questão 3.5. ………………………………………….………92

Figura 64 - Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio inverso,
Grupo 2, Tarefa 3, Questão 3.5. ……………………………………………...……93

Figura 65 - Estratégia aditiva para o raciocínio inverso, Grupo 3,
Tarefa 3, Questão 3.5. ……………………………………………………………………93

Figura 66 - Generalização algébrica contextual e factual. Estratégia de decomposição
dos termos para o generalizaação, Grupo 7, Tarefa 3, Questão 3.6. ………..……….94

Figura 67 - Generalização algébrica contextual e factual. Estratégia de decomposição
dos termos para o generalizaação, Grupo 10, Tarefa 3, Questão 3.6. …………..……94

Figura 68 - Generalização algébrica contextual, factual e simbólica. Estratégia de
decomposição dos termos para o generalizaação, Grupo 9, Tarefa 3, Questão 3.6….....94

Figura 69 - Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 12,
Tarefa 3, Questão 3.6. …………………………………………...……………….95

Figura 70 - Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio
generalização, Grupo 5, Tarefa 3, Questão 3.4. ………………………….……..………96

Figura 71 - Quatro primeiros termos da sequência pictórica, Tarefa 4. …………...….99

Figura 72 - Registo da lei de formação, Grupo 5, Tarefa 4, Questão 4.1………………99

Figura 73 - Identificação das partes constituintes nos termos, Grupo 1,
Tarefa 4, questão 4.1. …………………………………………………..……..…..100

Figura 74 - Estratégia de representação e contagem, Grupo 5, Tarefa 4,
questão 4.2. ………………………………………………………..…………...100

Figura 75 - Estratégia aditiva, Grupo 10, Tarefa 4, Questão 4.2. ……………………101

Figura 76 - Estratégia aditiva, Grupo 3, Tarefa 4, Questão 4.3. …………………..…102

Figura 77 – Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 1,
Tarefa 4, Questão 4.3. …………………………………………………..…………102

Figura 78 - Estratégia objeto inteiro, Grupo 8, Tarefa 4, Questão 4.3.……….......…103

Figura 79 - Estratégia aditiva, Grupo 3, Tarefa 4, Questão 4.4…………………..……103

Figura 80 - Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 4, Tarefa 4,
Questão 4.4. ……………………………………………………………………..…104

Figura 81 - Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 9,
Tarefa 4, Questão 4.4. ………………………………………………...…………104

Figura 82 - Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 12,
Tarefa 4, Questão 4.4. ……………………………………………….…..…………105

Figura 83 - Estratégia aditiva, Grupo 11, Tarefa 4, Questão 4.5……………...………105

Figura 84 - Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 1,
Tarefa 4, Questão 4.5. …………………………………………………..………106

Figura 85 - Generalização algébrica factual. Estratégia de decomposição
dos termos, Grupo 10, Tarefa 4, Questão 4.6. ………………………………………107

Figura 86 - Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição
dos termos, Grupo 1, Tarefa 4, Questão 4.6. ……………………………………..107

Figura 87 - Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição
dos termos, Grupo 8, Tarefa 4, Questão 4.6. …………………………………..…..108

Figura 88 - Três primeiros termos da sequência pictórica da tarefa 5. …….….……..111

Figura 89 – Registo da lei de formação, Grupo 10, Tarefa 5, questão 5.1. …….……111

Figura 90 - Representação ativa, Grupo 4, tarefa 5, Questão 5.1. ……………………112

Figura 91 - Registo da lei de formação, Estratégia decomposição dos termos,
Grupo 2, Tarefa 5, Questão 5.2. ………………………………………….………..112

Figura 92 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 6, Tarefa 5, Questão 5.2. …113

Figura 93 - Estratégia aditiva, Grupo 8, Tarefa 5, Questão 5.2. ……………………..113

Figura 94 - Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 12, Tarefa 5, Questão 5.3. ……………………………………………………………….……114

Figura 95 - Estratégia aditiva, Grupo 5, Tarefa 5, Questão 5.4. ………………….…….115

Figura 96 - Estratégia objeto inteiro e estratégia aditiva, Grupo 4, Tarefa 5, Questão 5.4. ……………………………………………….…………….115

Figura 97 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2, Tarefa 5, Questão 5.4. ………………………………………………………………...…..116

Figura 98 - Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 8, Tarefa 5, Questão 5.5. …………………………………………………………..117

Figura 99 - Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 5, Tarefa 5, Questão 5.5. …………………………………………………..………117

Figura 100 - Estratégia Objeto inteiro para os termos distantes, Grupo 1, Tarefa 5, Questão 5.5. ……………………………………………………..118

Figura 101 - Estratégia decomposição dos termos para os termos distantes, Grupo 2, Tarefa 5, Questão 5.5. ……………………………………………….……118

Figura 102 - Estratégia decomposição dos termos para os termos distantes, Grupo 12, Tarefa 5, Questão 5.5. …………………………………………….…..119

Figura 103 - Estratégia aditiva no raciocínio inverso, Grupo 5, Tarefa 5, Questão 5.6. ……………………………………………………….……….119

Figura 104 - Estratégia aditiva no raciocínio inverso, Grupo 9, Tarefa 5, Questão 5.6. ………………………………………………….…..………120

Figura 105 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2, Tarefa 5, Questão 5.6. ……………………………………………………..…………120

Figura 106 - Generalização algébrica contextual. Estratégia decomposição dos termos na generalização, Grupo 3, Tarefa 5, Questão 5.7. ……….…………121

Figura 107 –Estratégia Generalização algébrica contextual. Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 12,Tarefa 5, Questão 5.7…....122

Figura 108 -Generalização algébrica contextual. Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 8,Tarefa 5, Questão 5.7. ………………….123

Figura 109 - Curiosidade do Salvador, Tarefa 5. ……………………………………123

Figura 110 - Representação icónica, Grupo 11, Tarefa 5, Questão 5.1. ……..………124

Figura 111 - Estratégia Objeto inteiro e aditiva. Grupo 4. Tarefa 5. Questão 5.4…….125

Figura 112 - Resolução às questões 5.5. e 5.6., Grupo 13, Tarefa 5. ……………..…125

Figura 113 - Três primeiros termos da sequência pictórica, Tarefa 6. …………..…..128

Figura 114 - Registo da lei de formação, Grupo 2, Tarefa 6, Questão 6.1. ………….128

Figura 115 - Estratégia aditiva, Grupo 1, Tarefa 6, Questão 6.2. ……………………129

Figura 116 - Registo da lei de formação, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 5 Tarefa 6, Questão 6.2. ……………………………...…………129

Figura 117 Estratégia aditiva, Grupo 4, Tarefa 6, Questão 6.3. ………….…………..130

Fjigura 118 - Estratégia representação e contagem, Grupo 9, Tarefa 6, Questão 6.3. ………………………………………………………..………..130

Figura 119 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 8, Tarefa 6, Questão 6.3. …………………………………………………………….………131

Figura 120 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 7, Tarefa 6, Questão 6.3. ..132

Figura 121 - Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 3, Tarefa 5, Questão 6.4. …………………………………………………….….132

Figura 122 - Estratégia decomposição dos termospara os termos distantes, Grupo 2, Tarefa 6, Questão 6.4. ……………………………………..……133

Figura 123 - Estratégia aditiva no raciocínio inverso, Grupo 10, Tarefa 6, Questão 6.5. ………………………………………………….….…133

Figura 124 - Estratégia dedecomposição dos termos no raciocínio inverso, Grupo 5, Tarefa 6, Questão 6.5. …………………………………….……134

Figura 125 - Generalização factual. Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 10, Tarefa 6, Questão 6.6. ………………….…….135

Figura 126 - Generalização algébrica contextual. Estratégia decomposição dos termos na generalização, Grupo 5, Tarefa 6, Questão 6.6. ……………………..135

Figura 127 - Generalização contextual. Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 8,Tarefa 6, Questão 6.6. …………………..……135

Figura 128 - Estratégia decomposição dos termos, Grupo 11, Tarefa 6, questão 6.3. ……………………………………………………………………..136

Figura 129 - Identificação de números ímpares dos termos da sequência.
Grupo 13, Tarefa 6, questão 6.5. ……………………………………………………..…136

Figura 130 - Estratégia de generalização. Grupo 13, Tarefa 6, Questão 6.6…………137

## Índice de Tabelas

Tabela T1 – Organização das tarefas ………………………………………….…….40

Tabela T2 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos "Pá com fósforos"…..…… 196

Tabela T3 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos
"Sequência em S"……………………………………………………………….… 197

Tabela T4 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos
"Sequência de árvores construídas com fósforos"………………………..……….198

Tabela T5 – Estratégias utilizadas pelos diversos grupos "Sequências de
degraus que são formados por quadrados"…………………………………..….199

Tabela T6 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos "Sequência
letras "A" com fósforos"…………………………………………………...……200

Tabela T 7 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos "
Sequência letras "L" que são formadas por círculos"……………………..………201

# Capítulo 1

# Introdução

Este capítulo aborda os propósitos e ideias fulcrais que me levaram à realização deste estudo. Realça também as ideias subjacentes à importância da exploração algébrica nos primeiros anos, realçando aspetos centrais do ensino-aprendizagem da Álgebra, nomeadamente no desenvolvimento do pensamento algébrico na exploração de sequências. De seguida, indica o objetivo e questões do estudo, apresentando algumas perspetivas relacionadas como ensino da Álgebra e, por último, faz referência à organização geral do trabalho.

## 1.1. Motivações pessoais

No 1.º ano curricular do curso de Mestrado, a professora Neusa Branco esteve presente numa das sessões da disciplina “Didática dos Números e da Álgebra”, lecionada pelo professor João Pedro e pela professora Marisa Quaresma, no âmbito do mestrado “Didática da Matemática”. Teve a oportunidade de partilhar e discutir com os mestrandos um dos seus trabalhos de investigação: “O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação de professores dos primeiros anos”. Este estudo aborda o desenvolvimento do pensamento algébrico de futuros professores e educadores e a sua aprendizagem sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra nos primeiros anos, no âmbito de uma experiência de formação com uma abordagem exploratória. Após discussão do documento, a professora Neusa sugeriu a realização de um “brainstorming” relativo ao ensino-aprendizagem da Álgebra e, imediatamente, relacionei-a com um tópico complexo da Matemática que recorre e utiliza símbolos (letras e números) de forma abstrata para generalizar as diferentes operações aritméticas e a manipulação formal de equações e inequações. Como professor do 1.º ciclo do ensino básico, estas conceções acompanharam-me ao longo dos anos de prática docente pois, inconscientemente, assumi que este tópico pertencia exclusivamente aos currículos do 3.º ciclo do ensino básico e do ensino secundário, não o incluindo na minha prática pedagógica.

O facto da Álgebra não ser um tema autónomo nos diversos programas de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico e não ser um conteúdo explícito no meu curso de formação inicial e nas diferentes formações contínuas na área da Matemática que realizei, contribuiu para o desconhecimento relativamente à importância dada a este tema e ao seu papel para a compreensão da Matemática e o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. O programa do 1.º ciclo de 1990 (ME, 1990) estava organizado em três blocos de conteúdos, não havendo qualquer referência à Álgebra. Em 2001, o currículo nacional do ensino básico (ME-DEB, 2001) não explicita competências específicas no domínio da Álgebra para o 1.º ciclo, contudo, refere a importância de desenvolver nos alunos, ao longo de todos os ciclos, a propensão para procurar sequências e regularidades. No programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (ME, 2007) a Álgebra também não surge como tema para 1.º Ciclo, a par dos números e operações, geometria e medida e organização e tratamento de dados, mas é referido na introdução deste documento que neste nível de ensino deve existir uma iniciação ao pensamento algébrico. Assim, ao longo dos três temas programáticos há referências a situações que visam desenvolver a capacidade de abstração dos alunos e o seu pensamento algébrico. Por exemplo, nos números e operações o documento refere que:

> a exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números também é importante neste ciclo. Os alunos devem ser estimulados a descobrir regularidades em sequências de números e em tabelas de números, a observar padrões e a representá-los tanto geométrica como numericamente, começando a fazer conexões entre a geometria e a aritmética. (p. 14)

É neste sentido que o programa integra nos números e operações o tópico regularidades para o trabalho com sequências, nos 1.º e 2.º anos e nos 3.º e 4.º anos, com objetivos de aprendizagem distintos, muito ligados à investigação de regularidades e resolução de problemas.

No Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico em vigor (ME, 2013), o domínio números e operações inclui o conteúdo sequências e regularidades, no 2.º ano, sendo esta a única referência a aspetos relativos ao pensamento algébrico que encontramos no 1.º Ciclo do Ensino Básico.

A frequência no mestrado em Didática da Matemática e consequente análise e discussão de artigos científicos e de resultados de projetos de investigação, contribuíram para me consciencializar relativamente à importância de contemplar aspetos alusivos ao pensamento algébrico no 1.º ciclo, contribuindo para o aprofundamento da compreensão da Matemática (Canavarro, 2007), nomeadamente partindo da procura de regularidades generalizáveis. Deste modo, para além dos aspetos anteriormente referidos, que atestam a inexistência formal do ensino deste tema no 1.º Ciclo do Ensino Básico, as motivações fundamentais que me levaram a desenvolver este projeto, prendem-se com a falta de conhecimento pessoal relativamente à forma de explorar e de introduzir o ensino da Álgebra nos primeiros anos, aspeto fundamental e transversal a todos os tópicos matemáticos do ensino básico e para o qual eu não estava devidamente desperto. Kieran (2007) realça que várias investigações recaem sobre aspetos tais como: propriedades dos números e das operações, igualdades numéricas, padrões e relações e, apesar de não introduzirem taxativamente as notações algébricas convencionais, permitem a utilização da linguagem natural e de outras representações para expressar ideias algébricas.

## 1.2. A Álgebra e o pensamento algébrico nos anos iniciais

Ponte, Branco e Matos (2009) destacam que na antiguidade, a Álgebra teve origem no Egipto, na Babilónia, na China e na Índia e prendia-se com a formalização e sistematização de procedimentos gerais de resolução de problemas. Gradualmente, vai-se determinando o conceito de equação, aspeto que define a Álgebra como o estudo da resolução de equações. Diofanto de Alexandria foi um importante matemático grego do séc. III a.C., considerado por alguns autores o fundador da Álgebra, desenvolveu diversos processos para a resolução de equações e sistemas de equações. Alguns séculos mais tarde, o termo "Álgebra", surge num trabalho de Al-Khwarizmi (790-840), para designar a operação de "transposição de termos", aspeto fundamental na resolução de uma equação. No século XVI, através de François Viète (1540-1603), verifica-se uma alteração importante, iniciando-se uma nova etapa, a da Álgebra simbólica. Para Ponte, et al.,(2009), permanece a ideia de que em torno da Álgebra estão relações matemáticas abstratas, que se traduzem em equações, inequações, funções ou estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos. Ponte et al. (2009) referem que, junto daqueles que estudaram este tema, persiste a ideia de que a Álgebra consiste no trabalho com expressões, orientadas por um conjunto de *regras de transformação de expressões* (monómios, polinómios, frações algébricas, expressões com radicais...) e em processos de resolução de equações do 1.º e 2.º grau e de sistemas de equações. Para estes autores, esta perspetiva está de acordo com a terminologia usada nos programas da década de 1990, pois não se falava em "Álgebra", referia-se apenas "cálculo" ou "cálculo algébrico". Para muitos autores, o objeto central da Álgebra são os símbolos, definindo este campo da Matemática pelo uso que faz de uma linguagem própria – a linguagem algébrica. Esta visão é tida como uma conceção formalista da Matemática, popular no início do século XX, segundo a qual, a Matemática assenta essencialmente na manipulação de símbolos sem significado. O uso do simbolismo de um modo abstrato, sem indicativos significativos para o aluno, transforma a Matemática num jogo de manipulação, assente na prática repetitiva de exercícios abarcando expressões algébricas, aspetos fortemente presentes no movimento da Matemática Moderna. No final da década de 1950, a Matemática Moderna ganha força e consegue entrar nos currículos escolares de muitos países. Em Portugal, através de José Sebastião e Silva (1914-1972), o movimento da Matemática Moderna é integrado de forma equilibrada (Santos, 2013). Para Ponte (2013), este autor "tinha uma visão moderada" e a introdução foi feita com "muito cuidado", sendo uma "matemática muito abstrata, carregada de símbolos". A Matemática Moderna não corre bem em muitos países, levando a discussões entre os que a preconizam e os que defendem o que se ensinava antes. Reclama-se o regresso ao ensino das competências básicas (*back to basics*), ou seja o regresso ao cálculo, às contas e ao "fazer de cor" (Ponte, 2013).

Para Ponte et al. (2009), o aluno que não entende e usa a linguagem abstrata da Álgebra, compromete seriamente as suas opções escolares e profissionais. Para estes autores, caso os símbolos sejam trabalhados sem referências significativas, de uma forma abstrata, provavelmente tornar-se-ão incompreensíveis para os alunos.

Ao longo dos anos, os investigadores deixaram de ter o enfoque na resolução de equações, passando a ter como objetivo prioritário, no ensino da Álgebra, uma abordagem mais generalizada, nas sequências, sequências numéricas, e ainda variáveis e funções (Carraher & Schliemann, 2007). Ponte et al. (2009) defendem que as novas orientações curriculares deram uma nova perspetiva à Álgebra, trazendo mais precocemente o seu ensino, destacando o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. O NCTM (2000) refere que a aprendizagem da Álgebra deve começar desde os primeiros anos de escolaridade e que os estudantes de níveis intermédios devem continuar a explorar a Álgebra no sentido de se prepararem melhor para o seu estudo formal nos anos seguintes, destacando-se a ideia da "Álgebra para todos".

O ensino da Álgebra e consequente valorização do pensamento algébrico, revelou-se como uma inovação curricular em Portugal. Surgiu no *Currículo Nacional do Ensino Básico* (ME-DEB, 2001) que, apesar de não explicitar competências no domínio da Álgebra para o 1.º Ciclo, menciona a importância de, ao longo de todos os ciclos do ensino básico, desenvolver nos alunos a predisposição para procurar sequências e regularidades e para formular generalizações em diversas situações, incluindo contextos numéricos e geométricos. O Programa do Ensino Básico (ME, 2007) dá importância à introdução do pensamento algébrico nos primeiros anos de escolaridade, referindo que "o estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos que possibilita um maior sucesso na aprendizagem posterior, com consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos" (ME,2007, p.7). No programa de 2007, apesar de não ser introduzida como um tema independente, a Álgebra assume um caráter transversal, cujos objetivos de aprendizagem são considerados em Números e Operações e Geometria e Medida. Segundo Ponte et al. (2009), no 1º ciclo, a Álgebra não surge como tópico independente, contudo são assinaláveis os aspetos de caráter algébrico que são explorados nos primeiros anos de escolaridade: a exploração de sequências, o estabelecimento de relações entre números e entre números e operações e o estudo de propriedades geométricas.

Em Portugal, têm-se vindo a realizar investigações que referem a importância da promoção do pensamento algébrico nos primeiros anos (Alvarenga & Vale, 2007; Barbosa, 2011; Canavarro, 2007; Mestre & Oliveira, 2011). O PMEB (ME, 2007) favoreceu a introdução de elementos de inovação importantes, o que "constitui um fator de possíveis mudanças nas práticas de ensino-aprendizagem na sala de aula e, em consequência, nas aprendizagens matemáticas dos alunos" (Ponte & Serrazina, 2010, p.6). No 1.º Ciclo, o atual Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico em vigor (ME, 2013) está dividido em três domínios de conteúdos "Número e Operações (NO), Geometria e Medida (GM) e Organização e Tratamento de Dados (OTD)". Como já referi, a única referência a desígnios de cunho algébrico surge no 2.º ano, no domínio "números e operações" que inclui o conteúdo "sequências e regularidades".

Segundo Zazkis e Liljedahl (2002), a Álgebra engloba dois componentes distintos: pensamento algébrico e simbolismo algébrico. A Álgebra assume uma perspetiva mais ampla do que o cálculo algébrico. Para os autores, esta distinção baseia-se na hipótese de não dar tanto ênfase à manipulação de símbolos e à existência de um movimento para "*early algebra*", projeto criado em 1998, nos Estados Unidos da América, formado por uma equipa de psicólogos e educadores matemáticos, como Analucia D. Schliemann, Bárbara M. Brizuela e David W. Carraher. Para desenvolver este estudo, os investigadores realizaram intervenções com alunos dos anos iniciais da região de Boston. Neste projeto são elaborados materiais sobre Álgebra que abordam vários tópicos matemáticos (números, símbolos...), focando-se posteriormente na aprendizagem e no raciocínio dos alunos. Esta proposta pedagógica aposta na familiarização dos alunos mais novos com conceitos algébricos que, quando apresentados e explorados em situações significativas, promovem a aquisição futura de outros mais complexos. Kaput (1998, 2000) e Schielmann et al. (2003) consideram importante desenvolver junto de alunos com idades compreendidas entre os seis e os doze anos, o raciocínio e as relações algébricas, revelando através dos seus estudos que alunos dessas idades evidenciaram capacidade para resolver problemas algébricos, mesmo antes de conhecerem e fazerem uso de notação algébrica. Kaput (1999) considera que a Álgebra deve ser entendida de forma diferente da visão tradicional, defende que o desenvolvimento do pensamento algébrico deve estar acessível a todos os alunos e, para tal, é necessário criar um ambiente propício na sala de aula, que lhes permita aprender com compreensão.

### 1.3. **Objetivo e questões do estudo**

Este projeto tem como objetivo promover o desenvolvimento do pensamento algébrico em 26 alunos de 4.º ano, através da exploração de seis tarefas exploratórias relacionadas com sequências pictóricas crescentes. Através de um quadro de ensino-aprendizagem, esta experiência visa desenvolver as capacidades generalização, assim como identificar as estratégias utilizadas pelos diferentes grupos na realização de cada questão das tarefas propostas. Ponte et al. (2009) referem que, nos primeiros anos, as sequências pictóricas e numéricas, crescentes ou repetitivas, levam a várias hipóteses de generalização. A generalização e respetiva expressão simbólica, apresentam um papel central no raciocínio algébrico (Kaput, 2008; Mason, Johnston-Wilder, & Graham, 2005). Blanton (2008) menciona que essa mesma expressão simbólica pode surgir de diversas formas, podendo os alunos recorrer numa fase inicial à expressão oral e, gradualmente, usar símbolos próprios. O estudo tem também como objetivo compreender como é que alunos de 4.º ano, com desempenhos académicos distintos, analisam e generalizam sequências pictóricas crescentes, que têm subjacentes diferentes estruturas matemáticas e também distintas estruturas pictóricas.

A partir da realização deste estudo, procuro compreender o contributo de uma proposta pedagógica para o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos de 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, que segue uma abordagem de ensino exploratório e envolve a exploração de tarefas com sequências pictóricas crescentes que diferem nos elementos pictóricos que as constituem na estrutura matemática subjacente à sequência numérica que se associa à sequência pictórica ($n + b$; $an$; $an + b$). Deste objetivo emergem duas questões de pesquisa:

(i) Que as estratégias utilizam os alunos para responder às diversas questões de diferentes graus de dificuldade, nomeadamente para determinar termos próximos e distantes e verificar se um dado valor pertence à sequência numérica?

(ii) Que generalização estabelecem em sequências numéricas com diferentes estruturas matemáticas que surgem em sequências pictóricas distintas?

Para responder a estas questões, procurarei atender às representações, dificuldades dos alunos e estratégias de raciocínio utilizadas pelos treze grupos da turma na resolução das seis tarefas propostas, evidenciando as estratégias e generalizações utilizadas. Assim, este projeto visa também ser mais um contributo e um instrumento de reflexão no que se refere ao estudo da Álgebra nos anos iniciais de escolaridade e à prática do professor, desde a seleção da tarefa, à sua condução na sala de aula.

## 1.4. Organização geral do projeto

Este projeto encontra-se organizado em seis capítulos, seguidos das Referências Bibliográficas e dos Anexos. O capítulo 1, inclui as motivações pessoais, faz referência à Álgebra e ao pensamento algébrico nos anos iniciais e determina o objetivo e questões do estudo. Desta forma, a partir da revisão da literatura, é necessário aprofundar conhecimentos e especificar conceitos, aspetos tratados no capítulo 2, onde são referidas as sequências pictóricas crescentes e o pensamento algébrico, conceitos nucleares neste projeto. Ainda neste capítulo, faz-se referência às generalizações, às representações matemáticas, estratégias e dificuldades dos alunos na exploração de sequências pictóricas crescentes. No capítulo 3, proposta pedagógica, é apresentada a experiência de ensino, o ensino exploratório da matemática e as tarefas a realizar, com referência às respetivas planificações e dinâmicas da sala de aula. O capítulo 4, metodologia, apresenta e fundamenta as opções metodológicas, explicando o papel do investigador, caracterização dos participantes, instrumentos de recolha de dados e respetiva análise. O capítulo 5 explicita a experiência de ensino-aprendizagem, descrevendo e analisando o trabalho explorado pelos diversos grupos da turma, indicando as estratégias, a natureza das generalizações e principais dificuldades manifestadas em cada tarefa. O capítulo 6, conclusão, faz uma síntese do trabalho, analisa e discute os resultados no que se refere às questões inicialmente propostas e eventuais contributos e implicações para o trabalho em sala de aula. Por último, incluem-se as referências bibliográficas e os anexos.

# Capítulo 2

## Sequências pictóricas crescentes e pensamento algébrico

### 2.1. Exploração de sequências pictóricas e desenvolvimento do pensamento algébrico

As aulas de Matemática devem centrar-se em envolver os alunos na resolução e na discussão de tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas (NCTM 2009; National Research Council, 2012). Alvarenga e Vale (2007) realçam que "os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, podem e devem ser encorajados a observar padrões e a representar tanto geométrica como numericamente, iniciando o estudo da Álgebra e um modo fortemente intuitivo e informal" (p. 2). Carraher e Schliemann (2007) referem que os alunos nos anos iniciais de escolaridade, podem, gradualmente, aprender regras, princípios e representações. Branco (2008), sugere que "é necessário compreender de que modo o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser promovido nos primeiros anos de escolaridade" (pág. 190). Para Papic, Mulligan e Mitchelmore (2011), a Álgebra é tida como uma linguagem simbólica, que permite aos alunos expressarem relações e generalizações, normalmente envolvendo números, usando-os para resolver problemas sem necessitar de realizar cálculos numéricos muito extensos. Também para Molina (2011), é necessária uma abordagem inicial da Álgebra, visto enriquecer o ensino da Matemática, facilitando o desenvolvimento mais expressivo e integrado da Aritmética e da Álgebra. Uma sólida compreensão aritmética, exige generalizações matemáticas que são de natureza algébrica (Carraher & Schkiemann, 2007). Para Molina (2011), a Aritmética, para além de assumir um papel importante para integrar as características do pensamento algébrico, atendendo às suas inerentes regularidades, equivalências, diversas formas de estabelecer as relações numéricas, analisar e representar relações entre quantidades, revela também um lado funcional, que inclui estudar padrões, analisar como variam quantidades e identificar correlações entre variáveis. Alvarenga e Vale (2007) defendem que "os alunos, desde os primeiros anos de escolaridade, podem e devem ser encorajados a observar padrões e a representar tanto geométrica como numericamente, iniciando o estudo da Álgebra de um modo fortemente intuitivo e informal" (p.2). Pimentel (2010), realça que os alunos de tenra idade desenvolvem uma atividade muito similar à dos matemáticos, formulando, testando, conjeturando e provando afirmações de generalidade, e como tal, vê possibilidade e vantagem numa abordagem precoce das ideias algébricas. Branco (2008), sugere a necessidade em compreender de que modo o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser promovido nos primeiros anos de escolaridade.

A observação de padrões, a sua descrição e generalização tem sido considerada uma abordagem relevante na transição da Aritmética para a Álgebra (Mason, 1996). Por norma, o ensino da Aritmética antecede o da Álgebra, pois considera-se imperativo um conhecimento prévio e sólido dos conceitos numéricos que possibilitem a aquisição de competências que conduzam à aprendizagem de conceitos algébricos. Contudo, Carraher e Schliemann (2007) referem que certas investigações sugerem que alguns erros e dificuldades manifestadas durante a aprendizagem da Álgebra estejam relacionados com a separação que frequentemente é feita entre estes dois tópicos. Carraher e Schliemann (2007), referem que se pode fazer distinção entre a Aritmética e a Álgebra, o que cria uma fronteira clara entre estes dois domínios, da Matemática, ou então pode-se defender a continuidade entre eles. Usiskin (1988), citado por Pimenta e Saraiva, 2013 refere que existem alunos com bom desempenho relativamente à aprendizagem dos números e respetivas operações, contudo, com resultados nada significativos no que diz respeito à aprendizagem da Álgebra.

Para Papic, Mulligan e Mitchelmore (2011), a Álgebra é apresentada como uma linguagem simbólica, que permite expressar relações e generalizações, frequentemente envolvendo números, usá-los para resolver problemas sem recorrer a cálculos numéricos muito extensos.

Alguns investigadores têm refletido acerca da natureza do pensamento algébrico, verificando que consiste em algo mais complexo do que manipular expressões e resolver equações (Carraher & Schliemann, 2007; Kaput, 1999, 2008; Matos, Silvestre, Branco & Ponte, 2008; Ponte, 2006), defendem o seu desenvolvimento desde os anos iniciais de ensino. Blanton e Kaput (2005, p.413), caracterizam o pensamento algébrico como o "processo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares, estabelecem essas generalizações através de discurso argumentativo e expressam-nas de formas progressivamente mais formais e adequadas à sua idade". Para Kieran (2007), a Álgebra é entendida como uma ferramenta para expressar essas generalizações e não apenas uma técnica. Canavarro (2009) refere que a valorização do pensamento algébrico nos primeiros anos de ensino assume um caráter preparatório para a Álgebra dos anos posteriores e contribui para o aprofundamento da compreensão da Matemática (p.13). Mestre e Oliveira (2011), referem que "a introdução ao pensamento algébrico deve começar nos primeiros anos, contudo, não deve ser um tópico adicional do currículo. Deve ser entendido como uma forma de pensamento traz significado, profundidade e coerência à aprendizagem de outros temas"(p.201).

Kieran (2004) realça que, nos primeiros anos, o pensamento algébrico:

> envolve o desenvolvimento de modos de pensar através de atividades para as quais o simbolismo da Álgebra pode ser usado como ferramenta mas que não são exclusivas da Álgebra e que podem ser abordadas sem qualquer uso de simbolismos algébricos, tais como, analisar relações entre quantidades, detectar a estrutura, estudar a mudança, generalizar, resolver problemas, modelar, justificar, provar e predizer (p.149).

Kaput (2008), refere que uma das características do pensamento algébrico é a generalização e a expressão de generalizações e progressiva sistematização das mesmas, em sistemas convencionais de símbolos. Este autor apresenta três aspetos da Álgebra que contemplam o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos:

> 1. Álgebra como estudo das estruturas e sistemas abstratos a partir do resultado de operações e do estabelecimento de relações, incluindo sistemas que surgem na Aritmética (Álgebra como Aritmética generalizada) ou no raciocínio quantitativo.
> 2. Álgebra como o estudo das funções, relações e variação conjunta (covariação).
> 3. Álgebra como a aplicação de um conjunto de linguagens de modelação, tanto no interior como no exterior da Matemática (p. 11).

Ponte et al. (2009) referem que o pensamento algébrico promove o desenvolvimento da representação simbólica e de capacidades transversais à Matemática, tais como: a capacidade do aluno em utilizar diferentes sistemas de representação, no domínio da comunicação matemática; a capacidade de relacionar e generalizar; a capacidade de resolver problemas que está relacionado com a capacidade de modelar situações. Branco (2013), indica que o desenvolvimento do pensamento algébrico, trabalhado com o objetivo de generalizar e de estabelecer relações, permite aos alunos desenvolver também o domínio da aritmética, tal como referem NCTM (2007) e Kaput (1999), concretamente, o seu raciocínio e a capacidade de estabelecer relações entre números e operações. NCTM (2007), refere que o pensamento algébrico, ao longo da escolaridade, leva a "compreender padrões, relações e funções"; "representar e analisar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos"; "usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas"; "analisar a variação em diferentes contextos" (pág. 104). Assim sendo, segundo Mason (2005) generalizar deveria ser um aspeto natural da atividade matemática, defendendo que sem generalização não existe pensamento matemático. Generalizar é considerado a chave da Matemática elementar e o objetivo orientador das aulas de Matemática, visto contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático (Russel, 1999; Warren, 2009), assim como da compreensão algébrica (Warren, 2009), podendo ocorrer em qualquer tópico matemático lecionado desde os primeiros anos de escolaridade (Kaput, 1999).

Pimentel, Vale, Freire, Alvarenga e Fão (2010), referem que o desenvolvimento do pensamento algébrico necessita ser estimulado, através da análise de relações entre quantidades e da capacidade de generalizar. Para estes investigadores, as crianças, mesmo antes de frequentar a escola, adquirem um conjunto de conceitos informais relacionados com padrões, que lhes permite ordenar e organizar o seu mundo. Para Pimentel et al. (2010), o docente deve proporcionar aos alunos situações que permitam explorar padrões utilizando diversos suportes, tais como o corpo, gestos, ações ou até mesmo palavras. Para Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), a introdução de tarefas envolvendo a exploração de padrões, contribuem para o desenvolvimento do raciocínio e para o estabelecimento de conexões entre os diversos tópicos da Matemática. A identificação de regularidades é cada vez mais frequente nas abordagens realizadas ao estudo da Álgebra, tendo em conta que a procura de padrões constitui um aspeto fundamental para a definição de generalizações (Orton & Orton,1999; Ponte, 2005; Zazkis & Liljedahl, 2002). O pensamento algébrico envolve as capacidades de estabelecer generalizações e relações, interpretar situações e resolver problemas (Matos et al., 2008). Vale e Pimentel (2007), referem que o pensamento algébrico tornou-se uma orientação transversal do currículo. Para estas investigadoras, o pensamento algébrico diz respeito à simbolização (representar e analisar situações matemáticas, usando símbolos algébricos), ao estudo de estruturas (compreender relações e funções) e à modelação. Implica conhecer, compreender e usar os instrumentos simbólicos para representar o problema matematicamente, aplicar procedimentos formais para obter um resultado e poder interpretar e avaliar esse resultado (Vale & Pimentel, 2007). Na opinião de Canavarro (2007), defende-se a introdução do pensamento algébrico na Matemática desde os primeiros anos de escolaridade porque se tem mostrado válido que as dificuldades dos alunos nesta ciência residem na utilização de símbolos privados de significado e de regras e propriedades que visam a manipulação simbólica envolvendo um grande grau de abstração. O pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com cálculo algébrico e as funções. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o "sentido de símbolo" (Arcavi, 1994), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas. Para Ponte et al. (2009), "no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objectos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto". Para estes autores, umas das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de padrões e regularidades.

Para Vale e Pimentel (2013), "o pensamento algébrico centra-se em processos de descoberta de invariantes e na oportunidade de, sobre eles, fazer conjeturas e generalizações. Tem assim uma concretização natural em tarefas usualmente designadas de "descoberta de padrões" (p.108). Estas tarefas são extremamente ricas, no sentido de que mobilizam processos matemáticos fundamentais, são desafiantes e possibilitam múltiplas representações. Para ajudar a desenvolver o pensamento algébrico, as sequências propostas podem ser pictóricas ou numéricas, sendo que cada figura ou número da sequência é denominado "termo". Ponte et al. (2009) referem que reconhecer regularidades envolve muitos conceitos associados ao termos de uma sequência (cor, forma, tamanhos, orientação e o número) e que a exploração de sequências pictóricas inclui a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações. Existem dois tipos principais de sequências, as repetitivas e as crescentes (Ponte et al., 2009). Para estes autores, as sequências repetitivas são consideradas as mais simples e as que podem ser usadas para o trabalho inicial da procura de regularidades e da generalização. Verifica-se a existência de uma unidade identificável que se repete ciclicamente. Estas sequências podem ser exploradas com recurso a materiais manipuláveis e, numa fase posterior, recorrendo a representações pictóricas. A compreensão da unidade que se repete por parte dos alunos de tenra idade, confere às sequências repetitivas um meio privilegiado para o estudo da Álgebra e um contexto para a generalização (Morais, 2012). Morais (2012), refere que nas sequências crescentes cada termo depende do termo anterior e da sua posição na sequência, designada por ordem. Esta autora refere ainda a importância de ter em conta o primeiro elemento, visto poder influenciar a compreensão por parte dos alunos relativamente à formação da sequência. Para Barbosa et al. (2011), as sequências crescentes podem ser lineares ou não lineares, atendendo à respetiva tradução algébrica, podendo ser ou não feita através de uma expressão polinomial do 1.º grau. Para Morais (2012), existem diferentes possibilidades de continuar uma sequência e diferentes alunos podem interpretar os termos apresentados de modos alternativos, continuando-a de maneiras distintas. Rivera e Becker (2008) indicam uma tendência por parte dos alunos em ver uma determinada sequência de formas diferentes, o que naturalmente pode originar diferentes generalizações para a mesma sequência.

## 2.2. Generalização em sequências pictóricas crescentes

Para Ponte (2017), o pensamento algébrico pode (e deve) desenvolver-se desde o início da escolaridade, mesmo sem o uso de uma linguagem simbólica. Neste campo, assume grande destaque o trabalho com sequências. As sequências são disposições de objetos, usualmente em número infinito, que seguem (ou não) um determinado padrão. Os objetos podem ser números (sequências numéricas), figuras geométricas, configurações pontuais ou quaisquer outras figuras (sequências pictóricas) (Ponte, 2017). Devlin (2002), entende a matemática como "a ciência dos padrões" e que na base da atividade matemática está a análise de padrões, nomeadamente padrões numéricos, de formas, de movimento, entre outros, acrescentando que a atividade de um matemático "é examinar padrões abstratos, padrões numéricos, padrões de formas, padrões de movimento, padrões de comportamento, etc." (p.9). Ponte (2009) refere que "ainda não se conseguiu uma definição consensual de padrão, pois esta noção não é uma noção matemática propriamente dita, pois é transversal aos mais diferentes campos, nomeadamente geometria, teoria dos números, Álgebra, entre outros, o que faz com que em cada caso, ganhe uma definição própria". Para Vale (2012), o termo padrão usa-se quando procuramos uma ordem ou estrutura, daí a utilização frequente dos termos “repetição” e “regularidade”. A ideia fundamental num padrão envolve repetição e mudança. Barbosa (2009), define padrão como “todo o arranjo de números ou formas onde são detetadas regularidades possíveis de serem continuadas”. Vale e Pimentel (2009), salientam que quando falamos em padrões, referimos uma disposição ou arranjo de números, formas, cores ou sons, onde se detetam alguma regularidade, podendo ser considerado também como uma sucessão de termos que se repetem. Para Vale, Barbosa, Fonseca, Pimentel, Borralho e Cabrita (2008), os padrões são considerados um tema transversal a vários níveis de escolaridade e servem pressupostos imediatos de diferentes conteúdos. As tarefas que envolvem padrões permitem aos alunos uma melhor compreensão dos conceitos, comunicação do raciocínio e estabelecimento de conexões com outros tópicos da Matemática. Para Vale, Fão, Portela, Fonseca, Gigante, Lima e Pimentel (2007), esta compreensão permite um tipo de raciocínio matemático que ajuda os alunos a resolverem corretamente problemas e a desenvolverem o pensamento abstrato. Para estes autores, nos anos iniciais de escolaridade, “as experiências com padrões devem incluir o reconhecimento e a continuação de padrões, a análise e descrição de padrões e a criação de padrões. Devem ainda, em situações simples, ser incentivados, a fazer algumas generalizações”. Para Vale et al. (2009), deve-se valorizar a descoberta, a continuação, o completar e construir padrões e o trajeto em direção à explicitação de uma lei de formação. Na figura 1 estão alguns dos termos associados ao conceito de padrão.

Ao longo deste projeto será invariavelmente utilizado os termos “sequência” e “regularidade”. Ponte et al., (2009) referem que, ao longo de todo o ensino básico, o trabalho dos alunos com sequências envolve a procura de regularidades. Para Ponte et al. (2009), “regularidade”, indica a relação que existe entre os diversos objetos, o que é comum a todos eles e o que de certo modo os liga. Deste modo, o trabalho desenvolvido com sequências, inicia-se com a descoberta de regularidades, estando relacionado com o pensamento que varia, particularmente, a posição ou contagem associada a cada desenho ou número (Morais, 2012). Ponte (2005), sugere que o estudo de padrões e regularidades é um meio privilegiado na Matemática, que leva à aquisição de aprendizagens com significado para os alunos. Ponte e Velez (2011), referem que a realização de tarefas com sequências pictóricas está entre as situações que contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Ponte et al. (2009), indicam que o estudo de sequências e regularidades deve estar presente em todo o ensino básico e deve ter como objetivo principal contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Tendo em conta a sua natureza, os padrões são considerados um elemento determinante e privilegiado para trabalhar a Matemática e revelam-se uma forma de levar os alunos a explorar ideias relevantes, tais como, a generalização.

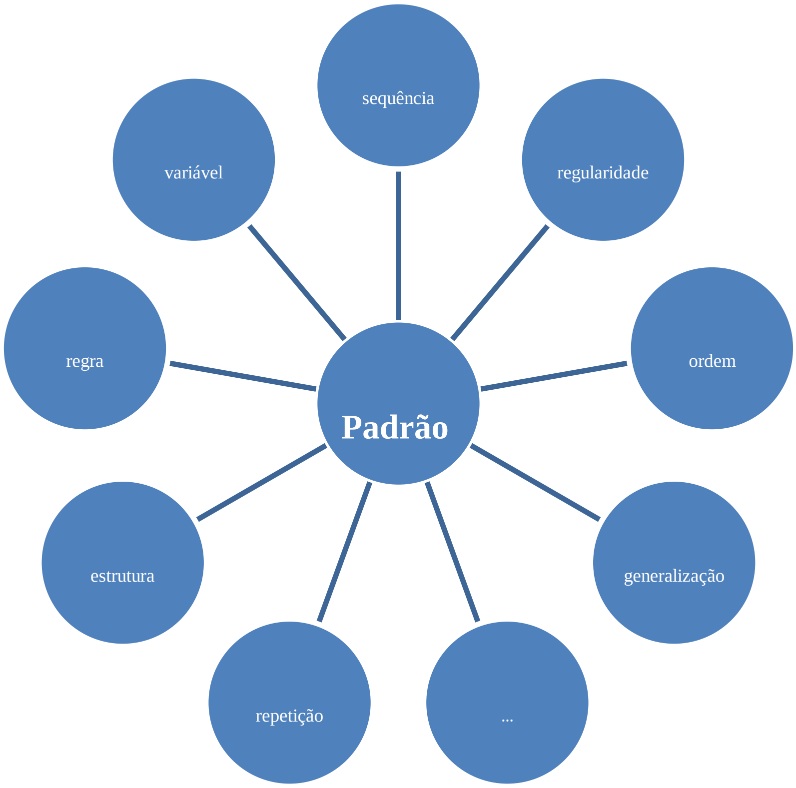



Figura 1 – Termos associados ao conceito *padrão* (Adaptado de Vale, 2009, p.11)

Para o NCTM (2007), a generalização é uma das principais finalidades do ensino da Matemática. Ponte et al. (2009), realçam que na análise de uma sequência pictórica, os alunos identificam regularidades e descrevem características locais e globais das figuras que a compõem. Referem ainda que tarefas com sequências pictóricas e com sequências numéricas compreendem a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações que, quando descritas em linguagem natural, exigem uma grande capacidade de abstração. Para Mestre e Oliveira (2011), a exploração de padrões desenvolve a capacidade de generalização, pois promove o reconhecimento de características comuns aos diferentes termos de padrão, ou seja, das relações existentes entre variáveis envolvidas, possibilitando a construção de uma regra geral. Estas autoras defendem a generalização enquanto uma capacidade construída coletivamente, obtida através da discussão com toda a turma, onde os alunos têm um papel ativo, quer na partilha e explicação das próprias ideias, quer na compreensão de raciocínios dos colegas. Orton e Orton (1999) e Vale et. al. (2011), referem ser unânime entre vários autores que tarefas com padrões possibilitam o desenvolvimento da capacidade de generalizar e consequentemente o pensamento algébrico. Vale et. al. (2011) consideram que "trabalhar com padrões ajuda os alunos a procurar regularidades e relações e encoraja-os a generalizar" (p.16). Ponte (2005) sugere que a procura de padrões e regularidades e a formulação de generalizações devem ser estimuladas desde os primeiros anos do Ensino Básico. Vale (2011) refere que tarefas com padrões têm-se mostrado potenciadoras no aperfeiçoamento de capacidades de generalizar e na promoção do pensamento algébrico. De acordo com o PMEB (ME, 2007), os alunos devem procurar regularidades em sequências de números finitas ou infinitas, e podem observar padrões de pontos e representá-los tanto geométrica como numericamente, fazendo conexões entre geometria e aritmética. Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a abstração e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. (p.14).

Blanton e Kaput (2005) entendem o pensamento algébrico como o "modo pelo qual os alunos generalizam ideias matemáticas partindo de um conjunto de casos particulares, criam essas generalizações através do discurso argumentativo, e expressam-nas de formas gradualmente mais formais e adequadas à sua idade" (p.413). Mason (1996) refere que a generalização é o coração da matemática. Para Kaput (1999), generalizar é continuar um raciocínio para além do caso em estudo, reconhecendo explicitamente o que de semelhante existe entre eles ou elevando o raciocínio a um nível onde o foco deixa de ser a situação inicial e passa ser o padrão, o procedimento, as estruturas e a relação entre eles. Ponte et al. (2009), referem que a ideia de generalização é um elemento central no pensamento algébrico, pois, segundo estes autores, permite descobrir e comprovar propriedades que se verificam em toda uma classe de objetos. Isto é, no pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objetos, mas essencialmente às relações existentes entre eles, representando e raciocinando relativamente a essas relações tanto quanto possível de um modo geral e abstrato. Para estes autores, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de regularidades num dado conjunto de objetos (Ponte et al., 2009). Pólya (1965) refere que a generalização não é um processo instantâneo, é gradual e inicia-se com a tentativa de entender os dados observados, fazendo analogias e testando casos especiais. Ponte et al. (2009), referem que a generalização pode ser desenvolvida através da exploração de sequências e regularidades, permitindo aos alunos identificar a lei de formação de uma determinada sequência, sendo que esta pode ser determinada recorrendo a várias estratégias.

### 2.3. Representações matemáticas em tarefas que promovam a exploração de sequências pictóricas crescentes

Um ensino eficaz da matemática incide bastante no uso de representações matemáticas variadas (NCTM, 2017). Quando os alunos aprendem a representar, discutir e estabelecer conexões entre as ideias matemáticas, de variadas formas, demonstram uma compreensão mais profunda e uma capacidade fortalecida de resolução de problemas (Fuson, Kalchman & Bransford 2005, Lesh, Post & Behr, 1987). A figura. 2 (retirada de NCTM, 2017) ilustra conexões importantes entre formas de representação contextual, visual, verbal, física e simbólica.

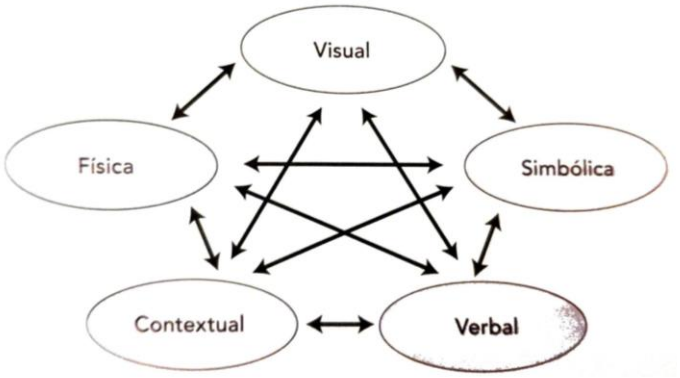



Figura 2. Conexões importantes entre representações matemáticas (NCTM, 2017, p.25)

Tripathi (2008) observou que usar essas "diferentes representações é como examinar o conceito através de uma variedade de lentes, com cada lente a proporcionar uma perspectiva diferente que torna a imagem (conceito) mais rica e mais aprofundada" (p.439). Especialmente os alunos mais novos beneficiam também com o uso de objetos físicos ou com a dramatização de processos durante a resolução de problemas (National Research Council, 2009).Devido à natureza abstrata da Matemática, as pessoas têm acesso às ideias matemáticas exclusivamente através das representações dessas ideias (National Research Council, 2001). As representações visuais assumem uma particular importância na aula de Matemática pois ajudam os alunos a aperfeiçoar a sua compreensão dos conceitos e procedimentos, a dar sentido aos problemas e a envolverem-se no discurso matemático (Arcavi, 2003; Stylianou & Silver, 2004). Segundo o NCTM (2017), estas representações apoiam a resolução de problemas no momento em que os alunos consideram relações entre quantidades, ao esboçarem diagramas ou fazerem tabelas ou gráficos. Para o NCTM (2017), "as representações visuais apoiam também o discurso porque os diagramas feitos pelos alunos ilustram as suas resoluções e são passíveis de serem mostrados, criticados e discutidos". Outros suportes visuais e desenhos assumem singular importância nos casos em que a língua materna do aluno não é a língua oficial do país em que este se encontra, ou quando existe alunos abrangidos por medidas de suporte à aprendizagem e à inclusão (Dec. Lei 54/2018 de 6 de julho) ou outras dificuldades, permitindo a participação pertinente de mais alunos no discurso matemático na sala de aula (Fuson & Murata, 2007). Para o NCTM (2017), as representações visuais auxiliam os alunos a seguir o raciocínio dos colegas e permitem "dar voz" às suas próprias explicações, ao apontarem para partes dos seus desenhos ou de outras representações visuais.

Relativamente ao pensamento algébrico, (Kaput, 1999) considera o uso das representações algébricas como uma das ferramentas intelectuais mais poderosas que a nossa civilização desenvolveu. Ponte e Serrazina (2000) consideram que o modo como as ideias matemáticas são compreendidas e usadas dependem da forma como são representadas. Para Morais (2012), uma representação Matemática não pode ser entendida isoladamente, necessita ser observada no seu contexto, atendendo a um sistema de representação, com regras e significados bem definidos. As representações são essenciais para se entenderem diferentes raciocínios dos alunos. Canavarro e Pinto (2012) referem que diariamente, em diferentes contextos, todos nós usamos múltiplas representações que nos permitem raciocinar sobre ideias, como dar visibilidade ao que pensamos. Ponte e Velez (2011) referem que as representações são "caracteres, símbolos, configurações pictóricas ou mesmo objetos que representam alguma ideia, objeto, ou relação matemática" (p.12). É essencial " encorajar os alunos a representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que as suas primeiras representações não sejam as convencionais (NCTM, 2007, p.75). É importante encorajar os alunos a representar as suas ideias sob formas que, para eles, façam sentido, mesmo que não sejam as convencionais, podendo ser desenhos, esquemas ou linguagem natural (Canavarro, 2009; Ponte & Serrazina, 2000; Valério 2005). Para

Valério (2005), as representações não convencionais podem ser o início para uma evolução e estruturação de conhecimento, pois ao usar as suas próprias representações, a aprendizagem do aluno tende a ser mais significativa visto este assumir um papel mais ativo nessa mesma aprendizagem. Contudo, é importante que os alunos aprendam as formas convencionais de representação, pois estas facilitaram a aprendizagem e comunicação matemática (Canavarro, 2009; NCTM, 2007). Para Goldin (2008), as representações convencionais incluem tabelas, gráficos cartesianos, retas numéricas, notações algébricas, e outras. Quando os alunos utilizam os seus conhecimentos na construção de uma destas representações convencionais, é possível tentar compreender a sua forma de pensamento e respetivas dificuldades, assim como, procurar entender como se realizou a interiorização dos conceitos abrangidos relativamente à explicação de uma definição ou procedimento (Ponte & Velez, 2011). Ainda relativamente a este aspeto, Nobre, Amado e Ponte (2011), sugerem que as representações matemáticas podem ser vistas como "poderosas lentes através das quais podemos analisar a forma como os alunos exprimem o seu pensamento algébrico no estudo dos diferentes tópicos" (p. 88). Kalathil e Sherin (2000, citados por Valério, 2005) afirmam que as "representações dos alunos dão informação sobre o que este pensa, sobre o conhecimento que os alunos partilham e constroem, servem de ferramenta para alunos e professores" (p.37). Valério (2005) refere que o processo desenvolvido pelos alunos com essas representações poderá tornar a aprendizagem mais significativa para eles. Este autor considera também que "quando os alunos representam estão a exteriorizar aquilo que pensam e a forma como organizam essa informação, as representações dos alunos constituem um ponto de partida para a evolução e construção de conhecimento" (Valério, 2005, p. 38).

As representações são portanto essenciais para se compreender diferentes raciocínios e uma importante forma de comunicação dentro da sala de aula. Ponte e Serrazina (2000), defendem que esta comunicação pode ser feita através da linguagem matemática, corporal, e natural ou através de desenhos, figuras, dramatizações e outras formas de representação. Neste processo de comunicação matemática são utilizados vários tipos de representações. Deste modo, ao longo da sua formação académica, os alunos adquirem capacidades de, mentalmente, criarem figuras e imagens que depois são exteriorizadas oralmente ou através da escrita. Nesta perspetiva, Ponte e Serrazina (2000), salientam que representações podem indicar o processo de representar e respetivo produto (representações externas), ou processos e produtos que ocorrem internamente na mente das pessoas (representações internas). Ponte e Velez (2011), referem que as representações externas correspondem a uma existência física, que pode ser verificada, tanto na forma escrita, em papel, num ecrã ou em outro qualquer suporte. Para Goldin (2008), representações externas são aquelas que apresentam existência física, de fácil observação, tais como as palavras escritas, numerais, gráficos ou equações algébricas. Neste sentido, as representações externas "são organizações simbólicas externas (símbolos figuras, diagramas, gráficos,...) cujo objetivo é representar ou codificar" uma determinada "realidade matemática" (Dufour-Janvier et al., 1987, citado por Nobre et al., 2011, p.244). Relativamente às representações internas, Goldin (2008), refere que estas não podem ser observadas diretamente, sendo difícil analisar a sua formação em cada indivíduo e respetiva caracterização. As representações internas são formadas por "imagens mentais que correspondem às formulações internas construídas pelo indivíduo sobre uma dada realidade" (Dufour-Janvier et al., 1987, citado por Nobre et al., 2011).

Ponte e Serrazina (2000) sugerem que, ao longo do 1º. Ciclo, é importante a abordagem de determinados tipos de representações. Para estes autores existem quatro tipos essenciais de representações: linguagem oral e escrita, representações ativas, representações icónicas e representações simbólicas. Contudo, estes autores referem ainda que existem outras formas de representação, provenientes das novas tecnologias, pois estas (mudam o modo como os alunos usam as formas convencionais de representação em Matemática e alargam o conjunto das representações com que eles podem trabalhar..." (Ponte & Serrazina, 2000, (p.41). Bruner (1999) diferencia três tipos de representações (ativa, icónica e simbólica). Estas representações desenvolvem-se ao longo do desenvolvimento do indivíduo e funcionam como um todo, pelo que, a interação entre as três, influi no desenvolvimento humano (Canavarro & Pinto, 2012). Também Boavida, Paiva, Cebola e Vale (2008) corroboram desta ideia, pois para estes autores, as três representações devem ser entendidas como um complemento umas das outras, não devendo ser consideradas independentes nem como alternativas, pois o indivíduo deve usá-las simultaneamente ou baseando-se em diferentes combinações. Para Bruner (1999) as representações ativas baseiam-se "na aprendizagem de respostas e formas de habituação" (p.28). Este autor considera que o ser humano é dotado de conhecimentos que não consegue expressar através de imagens ou palavras, necessitando recorrer à ação, ou seja, o conhecimento do aluno é desenvolvido através de um conjunto de ações que permitem alcançar determinadas soluções ou resultados, importantes para a aprendizagem da Matemática. Nas representações ativas sugeridas por Bruner, o aluno necessita associar ideias abstratas a situações concretas, desenvolvendo deste modo, modelos mentais que dão sentido a símbolos abstratos. Nestas representações podem-se enquadrar simulações e/ou modelos de manipulação, estruturados ou não (utilização de materiais manipuláveis – geoplanos, figuras ou sólidos, cubos, espelhos, cordas, plasticina, fósforos,...). Verifica-se este tipo de representação quando o aluno recorre à utilização de materiais didáticos, objetos ou simulações de situações para gerar modelos ilustrativos, no sentido de construir significados e conceitos (Boavida et al., 2008). Relativamente às representações icónicas, Bruner (1999) refere que dependem "da organização visual ou outra organização sensorial e do recurso a imagens de resumo" (p.28). Estas representações são formadas por imagens, figuras, desenhos ou esquemas que têm o objetivo de ilustrar ou clarificar conceitos, não o definindo completamente. Como o desenho é a primeira linguagem escrita das crianças, é através dele que estas encontram meios para comunicarem (Canavarro & Pinto, 2012). Este tipo de representação é formado por imagens e símbolos não convencionais presentes nas resoluções espontâneas dos alunos ou em registos propostos pelo professor. A representação simbólica proposta por Bruner (1999) recorre a símbolos que envolvem códigos matemáticos (numerais, sinais, fórmulas, expressões, escrita simbólica matemática,...). Ao invés das representações icónicas, as representações simbólicas são convencionais pois são parte integrante de um código específico. Canavarro e Pinto (2012) referem que "Ao referirmo-nos a representações simbólicas convencionais, referimo-nos a um conjunto de símbolos específicos da Matemática cujo significado é partilhado, símbolos esses que representam noções abstratas e relações. Entre estes encontram-se, por exemplo, os algarismos e demais numerais" (p. 62). Ainda para estes autores, a escrita é um meio essencial para as representações simbólicas, pois "constitui um importante recurso de representação das ideias dos alunos nas aulas de Matemática" (p.61).

É importante que os alunos tenham contato com mais e diversas representações, pois de acordo com o NCTM (2007), este contato variado promove a reflexão do uso que fazem delas "de modo a desenvolverem uma compreensão dos pontos fortes e fracos de várias representações com objetivos diferentes" (p.78). Os diferentes tipos de representações são uma maneira de ajudar a ultrapassar o problema verbal para uma forma visual, de unir o real ao abstrato (Valério, 2005). Para este autor, as representações são consideradas um recurso na resolução de problemas, na descoberta de uma solução ou para compreender aquilo que se está a fazer. Professores e alunos beneficiam com o uso de representações (NCTM, 2007), aspeto também sugerido por Carraher e Schliemann (2007) que referem que utilização de múltiplas representações devem ser empregadas em contextos com significado para o aluno, visto permitir aprofundar a aprendizagem da Matemática. Estes autores defendem ainda que o professor deve incentivar e ensinar o aluno a usar diversas formas de representação, pois estas possibilitam a expressão, enriquecimento e aprofundamento dos seus raciocínios algébricos. NCTM (2007) realça esta ideia ao referir que é de extrema importância que o professor esteja atento e sensível ao trabalho desenvolvido pelos seus alunos, escutando-os, observando os seus desempenhos e atividades matemáticas, verificando e analisando os seus registos e avaliando e refletindo relativamente às implicações dessas observações e análises.

Relativamente ao trabalho com sequências, Carraher e Schliemann (2007) referem dois tipos de representações, as geométricas e numéricas. Estas duas representações fazem a ligação das posições ordinais da sequência com o número de elementos dessa posição. Para estes autores, este aspeto promove uma mais rápida integração da compreensão visual e numérica dos alunos.

## 2.4. Estratégias utilizadas pelos alunos na exploração de tarefas que envolvem sequências pictóricas crescentes

Ponte e Serrazina (2000), referem que uma estratégia pode ser entendida como uma abordagem sujeita a ser usada em diversos problemas. Vários autores têm investigado e escrito relativamente às diversas estratégias dos alunos para alcançar generalizações. Ponte et al. (2009) referem que a generalização pode ser desenvolvida a partir da exploração de sequências e regularidades, onde os alunos podem identificar a lei de formação de uma dada sequência, sendo que esta pode ser identificada recorrendo a várias estratégias. Tendo em conta um dos focos do presente projeto, é de realçar as estratégias mais frequentemente utilizadas pelos alunos em sequências pictóricas crescentes. Ponte et al. (2009) referem que a exploração de sequências e regularidades permite desenvolver a capacidade de generalização conduzindo à identificação de uma lei de formação. Segundo estes autores, as estratégias que surgem com maior frequência são:

- *Estratégia de representação e contagem* – O aluno representa todos os termos da sequência até ao termo solicitado e conta os elementos que o formam para determinar o termo da sequência.
- *Estratégia aditiva* – Nesta situação em que se verifica uma abordagem recursiva, o aluno compara os termos consecutivos, identificando as alterações que ocorrem de um termo para o seguinte.
- *Estratégia do objeto* inteiro – Neste caso, o aluno considera um termo de uma dada ordem e com base nele determina um outro de uma ordem múltipla daquele de onde partiu. Caso não exista proporcionalidade direta, esta estratégia pode conduzir a generalizações erradas.
- *Estratégia decomposição dos termos* – Nesta estratégia o aluno relaciona o termo com a sua ordem, representando essa relação através de uma expressão algébrica. Ou seja, o aluno decompõe um termo de uma sequência pictórica, identifica o seu processo de construção e estabelece uma relação entre esse termo e respetiva ordem.

Radford (2010), refere que nas sequências pictóricas, a generalização pode ter uma natureza aritmética ou algébrica, sendo que esta última pode ser fatual, contextual ou simbólica. A generalização, segundo este autor, engloba dois elementos (o que é generalizado – afirmação geral; e o objeto generalizado – a informação de que se parte). A generalização aritmética centra-se em alguns termos da sequência, referindo-se a um aspeto local comum, em que o aluno não a utiliza para expressar qualquer termo da sequência. Para que uma generalização da sequência possa ser considerada algébrica, o objeto generalizado necessita de se concretizar numa regra que expressa qualquer termo dessa sequência (Ponte, 2014). Segundo Radford (2010), um aluno apresenta uma generalização factual quando se refere a termos de ordens distantes mas sempre atribuindo um valor à ordem. A generalização factual inicia-se com o uso da recursividade, entendida como uma estratégia recursiva, aditiva ou aritmética, que assim sendo, está tanto na natureza aditiva como aritmética (Radford, 2010; Rivera & Becker, 2008), pois os alunos identificam os termos dependentes de uma sequência crescente como sendo constantemente aumentados pela diferença comum (Morais, 2012). Na generalização contextual e na generalização simbólica o objeto generalizado é identificado. Enquanto que, na generalização contextual, para qualquer ordem, a generalização refere o respetivo número da figura, assumindo o objeto generalizado a descrição relativa ao contexto, na generalização simbólica, o objeto generalizado e respetivas operações traduzem-se em linguagem algébrica simbólica. Radford (2006) realça a importância da partilha de resultados e da discussão entre os grupos de forma a possibilitar a reflexão sobre outras estratégias. Barbosa (2011), partindo da análise de categorias apresentadas por alguns investigadores (Lannin et al., 2006; Orton, 1999; Rivera & Becker, 2008; Stacey, 1989) propôs uma categorização dos vários tipos de estratégias utilizadas pelos alunos quando resolvem tarefas que envolvem sequências pictóricas crescentes, nomeadamente:

- Contagem (quando é desenhada uma figura e contados os seus elementos).
- Termo unidade (ao considerar um termo da sequência como unidade, usando múltiplos da mesma. Esta estratégia pode ser aplicada sem ajuste, com ajuste numérico ou com ajuste contextual).
- Diferença (o aluno identifica a subcategoria recursiva, continuando a sequência com base na diferença entre termos consecutivos e a subcategoria múltiplo da diferença, em que o aluno usa a diferença entre os termos consecutivos como fator multiplicativo).
- Explícita (os alunos descobrem uma regra com base no contexto do problema).
- Tentativa erro (os alunos tentam adivinhar a regra fazendo sucessivas tentativas).

Para Stacey (1989), as tarefas de exploração de padrões incluem dois tipos de generalização: a generalização diz-se próxima quando os termos são determinados recorrendo à contagem ou a desenhos na descoberta do termo seguinte, levando o aluno a estabelecer relações recursivas, e a generalização distante que implica a descoberta de uma regra geral, ou expressão geradora. Mestre e Oliveira (2011) referem a importância da exploração de termos distantes. Para estas autoras, esta exploração permite aos alunos passar de estratégias recursivas para estratégias que lhes permita construir uma regra de formação da sequência.

A componente visual pode condicionar a exploração e generalização de uma determinada sequência pictórica crescente. Para Sasman, Olivier e Linchevski (1999), a visualização pode estar relacionada com a complexidade da figura. Estes autores distinguem figuras transparentes (a regra que caracteriza a sequência é evidente na estrutura das figuras) e não transparentes (a regra não é facilmente descoberta através da simples observação das figuras da sequência). Para Branco (2013), a estrutura matemática da sequência é extremamente importante para o trabalho que os alunos desenvolvem no que respeita particularmente à generalização.

Um outro aspeto relacionado com as tarefas e que influencia as estratégias utilizadas pelos alunos é a ordem do termo pedido, podendo esta ser próxima ou distante. Para Orton e Orton (1999), essa alteração pode traduzir-se numa generalização correta ou incorreta, pois perante questões relacionadas com termos mais distantes de uma sequência, os alunos podem passar de um método correto para um método incorreto, muitas vezes baseado na utilização de uma relação de proporcionalidade direta inexistente.

### 2.5. Dificuldades dos alunos na exploração de sequências pictóricas crescentes

Há estudos que evidenciam fatores que podem ter impacte significativo na escolha das estratégias utilizadas na generalização. Maioritariamente, estes estudos referem características associadas à estrutura da tarefa. Frequentemente, na generalização de padrões, surgem erros ou dificuldades no trabalho dos alunos e que, pela sua importância, constituem-se focos de interesse por parte da literatura. A identificação de dificuldades e limitações ao processo de generalização, assim como das razões que levam a essas dificuldades, é um aspeto essencial para que o professor possa promover nos alunos a capacidade de generalizar. Lannin (2003) realça que o conhecimento do raciocínio algébrico dos alunos pode ajudar o professor a identificar os erros e dificuldades mais comuns e levá-los à compreensão daquilo que compõe a generalização algébrica válida e eficiente. Lannin, Barker e Townsend (2006, referidos por Barbosa, 2009), referem a existência de vários fatores que parecem influenciar as estratégias de generalização utilizadas pelos alunos. Propuseram três categorias que possibilitam prever a seleção de estratégias feita pelos alunos: fatores sociais, resultantes das interações e influências dos alunos com os seus pares e professor; fatores cognitivos, associados às estruturas mentais que o aluno desenvolveu. Estas podem assimilar novo conhecimento à estrutura existente ou acomodar a estrutura mental para se adaptar ao novo conhecimento. Relativamente ao pensamento algébrico, as estruturas cognitivas abrangem o conhecimento prévio das operações matemáticas, as estratégias utilizadas noutras tarefas e a capacidade de visualizar a estrutura da sequência; e fatores associados à estrutura da tarefa estão relacionados com a sua natureza e com os valores utilizados.

Relativamente às sequências pictóricas crescentes (Radford, 2010), refere que os alunos mais jovens têm dificuldade em verificar, de uma forma natural, o que é comum, sendo esta verificação um processo caracterizado pela diferenciação entre o igual e o diferente. Desta forma, e com o objetivo de saber se os alunos são capazes de encontrar a regra que leva ao termo geral, Borralho et al. (2007) verificam que para os alunos torna-se gradualmente mais difícil descobrir termos numa sequência, à medida que se encontram mais distantes dos termos que lhes são apresentados; é mais difícil explicar a formação de uma sequência do que continuá-la; para a maioria dos alunos é mais difícil explicar por escrito as regras verificadas na sequência do que explicá-las oralmente. Lannin, Barker e Townsend (2006) referem que, quando os valores inicialmente dados são próximos, os alunos tendem a utilizar regras recursivas, independentemente do tipo de sequência e da componente visual da tarefa. Quando os valores inicialmente dados são múltiplos de termos conhecidos da sequência, normalmente os alunos aplicam a estratégia objeto inteiro para sequências lineares crescentes. Neste aspeto, os autores realçam a influência da visualização, referido que alunos com alguma dificuldade no campo visual, aplicam de uma forma incorreta a estratégia objeto inteiro enquanto que, alunos que demonstram maiores capacidades visuais, ajustam a estratégia no caso de não se verificar uma situação de proporcionalidade direta.

Lannin (2003) refere que perante tarefas que envolvam sequências pictóricas crescentes, algumas crianças sentem dificuldades em utilizar estratégias para além da recursiva/aditiva. Relativamente à estratégia objeto inteiro, este autor refere que esta pode trazer dificuldades para os alunos relativamente à criação de uma regra que permita encontrar qual termo da sequência. Rivera e Becker (2008), verificam que os alunos têm dificuldade em justificar a regra de formação de dada uma sequência pictórica crescente. Morais (2012), sugere que perante diferentes justificações dadas pelos alunos, surge a dificuldade em identificar quais constituem uma justificação válida para a generalização. Lannin (2003) realça que para explicar e justificar, os alunos podem recorrer a exemplos específicos e não a generalizações, aspeto que leva a que os alunos confundam a justificação com construção da generalização (Rivera & Becker, 2009).

Mason (1996, citado por Barbosa, 2013) indica que há uma tendência por parte dos alunos em criar uma regra geral, nem sempre correta, baseada na análise de um ou dois casos particulares. Deste modo, este autor realça a necessidade de se disponibilizarem diversos tipos de sequências, permitindo a exploração quer da visualização quer da manipulação no sentido de facilitar a generalização. Driscoll (1999) refere três aspetos que podem compor um obstáculo ao raciocínio dos alunos, comprometendo assim a generalização: rapidez com que os alunos procuram criar uma expressão geral, exploração de poucas tarefas e exemplos com sequências; a análise da sequência conduzir a conclusões incorretas (os alunos não refletiram sobre as relações que estabeleceram); a generalização a partir de propriedades incorretas (utilização incorreta da proporcionalidade direta). Para este autor, estas situações são autênticos desafios para os professores, pois leva a que o professor procure promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos.

Para Morais (2012), os professores devem incentivar os alunos a encontrar uma regra e a justificá-la adequadamente. Devem questionar a turma, no sentido de verificar a validade ou não da justificação de cada aluno, dando importância à compreensão pela qual a regra resulta em determinada situação. Por outro lado, segundo esta autora, os professores devem enfatizar a descoberta da regra correta.

# Capítulo 3.

# Proposta Pedagógica

Neste capítulo apresento as principais ideias que estruturam a intervenção pedagógica realizada no 4.º ano de escolaridade com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico em situações com sequências pictóricas crescentes que por meio da análise dos seus termos, visando a promoção da generalização algébrica. Assim, refiro os objetivos e a organização da experiência de ensino, caracterizo os participantes e s tarefas propostas. Por fim, descrevo a dinâmica das aulas que é promovida nesta proposta pedagógica.

## 3.1. Contextualização e objetivos de aprendizagem

A proposta pedagógica tem por base as orientações do perfil do aluno à saída da escolaridade obrigatória e as aprendizagens essenciais para a Matemática no 1.º ciclo do ensino básico. Neste contexto evidencia-se, de modo particular, uma das suas dez áreas de competências centrais no perfil dos alunos, o Raciocínio e Resolução de Problemas No âmbito do raciocínio estão envolvidos os processos lógicos que permitem aceder à informação, interpretar experiências e produzir conhecimento. Relativamente à resolução de problemas, destacam-se os procedimentos que permitem encontrar respostas para uma nova situação, apelando ao raciocínio no sentido de promover uma decisão, a construir e usar estratégias e à formulação de novas questões (ME, 2017). Segundo este documento, o trabalho envolvendo esta área deve promover que os alunos sejam capazes de: "interpretar informação, planear e conduzir pesquisas; gerir projetos e tomar decisões para resolver problemas; desenvolver processos conducentes à construção de produtos e de conhecimento usando recursos diversificados" (p. 23).

Também as aprendizagens essenciais (ME, 2018) evidenciam a resolução de problemas e o raciocínio, assim como a comunicação matemática, como capacidades que são transversais a todos os temas matemáticos. No tema números e operações evidenciam-se os seguintes objetivos de aprendizagem:

- Conceber e aplicar estratégias na resolução de problemas com números racionais não negativos, em contextos matemáticos e não matemáticos, e avaliar a plausibilidade dos resultados.
- Reconhecer regularidades em sequências e em tabelas numéricas, e formular e testar conjeturas.
- Exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia). (p. 8)

Uma das finalidades do ensino Matemática para alunos do 4.º ano, é "Promover a aquisição e desenvolvimento de conhecimento e experiência em Matemática e a capacidade da sua aplicação em contextos matemáticos e não matemáticos" (ME, 2018, p. 2). Esse documento indica, que ao longo do ensino básico, os alunos devem compreender as técnicas, procedimentos, conceitos, relações e propriedades, desenvolvendo paralelamente a competência de os aplicar no sentido de resolver situações nos mais diversos contextos. É importante também que os alunos "desenvolvam capacidade de abstração e generalização e de compreender e elaborar raciocínios lógicos e outras formas de argumentação matemática; desenvolvam a capacidade de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem áreas matemáticas diferentes e problemas de modelação matemática (ME, 2018, p. 2). A outra finalidade evidenciada nas aprendizagens essenciais e respetiva articulação com o perfil do aluno, é também atendida na elaboração da proposta pedagógica: "Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de reconhecer e valorizar o papel cultural e social desta ciência" (ME, 2018, p.3). Assim, ao longo do ensino básico, é importante que os alunos desenvolvam o interesse pela Matemática, ampliando também a confiança nos seus conhecimentos e capacidades matemáticas, assim como, enfrentar com autonomia, persistência e tranquilidade inúmeras contextos que envolvam Matemática, quer a nível académico, quer em situações que venham a enfrentar no quotidiano. Também é importante que os alunos valorizem o papel da Matemática, reconhecendo a importância desta ciência no desenvolvimento das outras ciências, na tecnologia e noutros âmbitos da atividade humana., reconhecendo e valorizando também a Matemática como “elemento do património cultural da humanidade” (ME, 2018, p. 3). Esse documento apresenta objetivos específicos que concretizam a finalidade enunciada, articulando-se também com o perspetiva do no perfil do aluno:

> i) Desenvolver interesse pela matemática e valorizar o seu papel no desenvolvimento das outras ciências e domínios da atividade humana e social.
> ii) Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos, e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem.
> iii) Desenvolver persistência, autonomia e à-vontade em lidar com situações que envolvam a Matemática no seu percurso escolar e na vida em sociedade. (p. 8)

Atendendo ao enquadramento curricular para o 1.º ciclo apresentado, surge então esta experiência de ensino que sustenta este estudo baseado em tarefas de natureza aberta e numa abordagem de ensino exploratório. Para Cobb, Confrey, diSSessa e Schauble (2003), uma conjetura de ensino-aprendizagem que assenta no pressuposto de que a aprendizagem decorrente em ambiente de sala de aula onde se promovem as produções resultantes da realização das tarefas e a discussão coletiva, orientada pelo professor, pode gerar uma maior facilidade na perceção de significados matemáticos. Um ensino efetivo da matemática envolve os alunos no discurso para promover a aprendizagem matemática de toda a turma (NCTM, 2017). O discurso na aula de matemática dá aos alunos oportunidades para partilharem ideias e clarificarem compreensões, para elaborarem argumentos convincentes em relação ao como e ao porquê do funcionamento das coisas, para desenvolverem uma linguagem para exprimirem as ideias matemáticas e para aprenderem a analisar sob diversas perspetivas (NCTM, 1991; 2000). O ambiente na sala de aula deve ser propício à comunicação, encorajando os alunos a verbalizar os seus raciocínios e, também, a expor dúvidas ou dificuldades, a colocarem questões e a falar sobre erros seus ou dos colegas (ME, 2007). Os momentos de discussão de estratégias e de processos de resolução e resultados de problemas, bem como de outros processos matemáticos, na turma, devem ser frequentes, assim, o professor assume um papel relevante, nomeadamente na colocação de questões que estimulem o pensamento dos alunos e na condução do discurso, focalizando-o nos conhecimentos matemáticos e na organização e regulação dessas participações (ME, 2007). No decurso da comunicação, o professor vai introduzindo o vocabulário específico e adequado e ajudando à sua compreensão, relacionando a linguagem natural com a linguagem matemática, neste processo, os alunos vão ampliando o seu conhecimento de diversas formas de representação matemática e vão aprendendo a identificar as mais apropriadas a cada situação (ME, 2007). A par do discurso na sala de aula, também as tarefas assumem particular relevância na prática do professor (Ponte, 2014; Ponte, Quaresma & Branco, 2012), estando ambos articulados. A escolha da tarefa assume uma grande importância na aprendizagem dos alunos, no modo como estes são envolvidos e na dinâmica da aula.

Um discurso que se centre em tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas é um mecanismo de primeira importância para o desenvolvimento da compreensão de conceitos e de uma aprendizagem da matemática com significado (Michaels, O'Connor & Resnick, 2008). Carpenter, Franke e Levi (2003), referem que os alunos que articulam e justificam as suas ideias matemáticas e que são levados a raciocinar partindo das suas explicações e das explicações dos outros, justificando as suas respostas, acabam por desenvolver uma compreensão profunda, aspeto essencial para o futuro sucesso da matemática e em áreas relacionadas.

O NCTM (2017) refere que o professor, ao organizar uma discussão a nível de toda a turma, tem de decidir as resoluções a partilhar, qual a ordem em que serão partilhadas e as questões a colocar para ajudar os alunos a estabelecer conexões entre as diferentes estratégias e entre as ideias chave que orientam a aula.

Esta experiência de ensino pretende promover as capacidades de representação e de generalização, a partir de sequências pictóricas crescentes. Um ensino eficaz da Matemática integra o uso de representações matemáticas variadas (NCTM, 2017). Ainda segundo o NCTM (2017), as representações incorporam características importantes das estruturas mentais e ações matemáticas, tais como o desenho de diagramas e o uso de palavras para mostrar e explicar significados. As representações visuais são de particular importância na aula de Matemática ao ajudar os alunos a aperfeiçoar a sua compreensão dos conceitos e procedimentos, a dar sentido aos problemas e a envolverem-se no discurso matemático (Arcavi, 2003; Stylianou & Silver 2004).

O interesse pelo tema do desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos e a pertinência de ser promovido no grupo que participa no estudo surge do contacto profissional que já existia com a professora titular de turma. Conheço a professora há bastantes anos e, frequentemente, falamos de aspetos relacionados com o ensino e o currículo da Matemática no 1.º ciclo do ensino básico. Numa dessas ocasiões, conversámos sobre Álgebra, na sua transversalidade, sobre a importância do pensamento algébrico, em particular, na promoção da capacidade de generalização. A profundidade e variedade das conexões que possibilita com todos os temas da Matemática permitem considerar este tema como transversal dentro do currículo no ensino básico (Vale & Pimentel, 2011). No 1.º ciclo esse tema surge então de modo articulado com outros temas matemáticos, não tendo expressão como tema isolado. O tema apenas surge de modo explícito no currículo do 2.º ciclo do ensino básico. Para Rivera e Becker (2008), uma experiência de ensino que explore sequências e regularidades, faculta aos alunos uma oportunidade para se envolverem em situações de resolução de problemas, que lhes permitam obter os requisitos matemáticos formais da generalização algébrica. Vale e Pimentel (2011) apontam que o trabalho com padrões ajuda os alunos a procurar regularidades e relações, encorajando-os a generalizar, permitindo também preparar os alunos para aprendizagens posteriores, para além do desenvolvimento de capacidades transversais de resolução de problemas, raciocínio e comunicação. Da discussão desses aspetos com a professora da turma, surge a indicação de que ao longo dos quatro anos de trabalho com a turma foram poucas as situações de exploração desse tópico, visto não haver referências significativas no programa então em vigor, o Programa e Metas Curriculares da Matemática (ME, 2013). Reflete, assim, que ainda que tenha sido tratado, esse trabalho pode não ter tido a profundidade e intencionalidade que poderia ter ou que, eventualmente, o trabalho até tenha sido algo "desadequado", pois associa o termo "Álgebra" a um tópico que só se explora formalmente no 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário. Conjugando as minhas motivações pessoais relativamente ao ensino da Álgebra com o interesse manifestado pela professora Catarina (nome fictício) em desenvolver com os seus alunos tarefas que façam emergir o pensamento algébrico, surgiu a oportunidade de desenvolver o projeto de intervenção com a sua turma.

Deste modo, a experiência de ensino enquadra-se no 4.º ano do 1.º ciclo do ensino básico no tema Números e Operações, estando fortemente ancorada no raciocínio matemático e na comunicação matemática. Tendo por base o expresso nas Aprendizagens Essenciais (ME, 2018), os principais objetivos de aprendizagem visados são:

- Reconhecer regularidades em sequências e em tabelas numéricas, e formular e testar conjeturas;

- Exprimir, oralmente e por escrito, ideias matemáticas, e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia);
- Desenvolver confiança nas suas capacidades e conhecimentos matemáticos, e a capacidade de analisar o próprio trabalho e regular a sua aprendizagem.

Pretende-se que os alunos desenvolvam o gosto pela Matemática e as suas capacidades de representação e generalização, realizando tarefas matemáticas com sequências pictóricas e interagindo socialmente em trabalho de pequeno grupo e em grupo turma. As sequências pictóricas crescentes permitem fazer emergir a generalização, evidenciando-se relações que podem emergir da análise visual dos termos. Pretende-se, assim, proporcionar aos alunos a oportunidade de utilizar diferentes representações (ativas, pictóricas ou simbólicas) no sentido de representarem e caracterizarem a sequência dada em cada uma das seis tarefas. Considero pertinente que o conjunto de tarefas interrelacionadas entre si, constitua uma sucessão coerente, no sentido de proporcionar um percurso de trabalho que leve à aprendizagem (Ponte, 2009).

Depois de recebida a autorização para a realização do estudo, reuni com a professora Catarina no sentido de perceber as dinâmicas da sala de aula, o comportamento global da turma e outros aspetos que eventualmente pudessem ser relevantes para o trabalho a desenvolver em contexto sala de aula. Neste estudo assumi o duplo papel de investigador e professor durante a exploração das tarefas, orquestrando todo o processo ensino-aprendizagem, aspeto que, de acordo com as características globais da turma, teve a anuência da professora titular de turma. Antes da exploração da primeira tarefa, estive dois dias em contexto sala de aula, momentos que me permitiram conhecer os alunos, observar as diversas dinâmicas e promover uma gradual proximidade com os mesmos, no sentido de ser encarado como um elemento naturalmente integrante e não como um elemento estranho ao contexto. Nestes dois dias, também tive a oportunidade de interagir com a turma, expliquei o propósito do estudo, o trabalho a desenvolver e respetivos procedimentos e regras, a natureza das tarefas e o que era expectável relativamente ao contributo dos alunos. Para a realização do trabalho autónomo, os 26 alunos da turma foram divididos em pares, cujo critério de formação foi definido pela professora titular de turma, atendendo ao desempenho individual na área da matemática e à procura de maior homogeneidade entre os pares.

## 3.2. Participantes

Os participantes deste estudo foram os 26 alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade e o investigador, que desempenhou também o papel de professor. A turma pertence a uma escola do 1.º ciclo de ensino básico pública do concelho do Cartaxo. Dos 26 alunos, 12 são do género feminino e 14 são do género masculino. Com a exceção de seis alunos, todos os outros frequentaram juntos o jardim-de-infância, pelo que demonstravam enorme empatia e confiança entre eles.

A professora titular da turma realizou uma breve caracterização da turma, que foi completada pela observação da turma realizada nos dois dias anteriores ao início da intervenção. É um grupo com bom comportamento, heterogéneo a nível do desempenho na área da matemática, sendo que cinco alunos têm um aproveitamento insatisfatório, nove têm aproveitamento satisfatório, oito têm um bom aproveitamento e os restantes quatro apresentam um muito bom aproveitamento. Previamente apresentei as tarefas a desenvolver e o seu encadeamento à professora Catarina que referiu não ter ainda desenvolvido tarefas exploratórias com sequências com os seus alunos e que quando desenvolvia algumas tarefas com sequências, tratavam-se de exercícios, tarefas mais rotineiras e de resposta curta e rápida, sem uma sucessão de questões estruturadas que promovessem o estabelecimento de generalizações e consequente desenvolvimento do pensamento algébrico.

## 3.3. Tarefas

O ensino da Matemática baseado na exposição exímia do professor não pode mostrar muito interesse na noção de tarefa. Contudo, o ensino que valoriza o papel ativo do aluno na aprendizagem precisa de forma fundamental desta noção. Vários autores (Doyle, 1988; Mason & Johnston-Wilder, 2006;Stein & Smith, 1998) destacam o papel das tarefas na aprendizagem dos alunos, permitindo o trabalho em torno de ideias matemáticas específicas. As tarefas são o elemento organizador da atividade de quem aprende (Ponte, 2014). O NCTM (2017) aponta também para a importância das tarefas: "Um ensino eficaz da Matemática envolve os alunos na resolução e discussão de tarefas que promovem o raciocínio matemático e a resolução de problemas, além de permitirem diferentes abordagens e diferentes estratégias” (p. 17). Identifica diversas investigações que têm evidenciado o papel das tarefas matemáticas, referindo três descobertas importantes:

> “1. Nem todas as tarefas proporcionam as mesmas oportunidades para o pensamento e aprendizagem dos alunos (Hiebert et al., 1997; Stein et al., 2009).
> 2. Há mais aprendizagem em aulas onde as tarefas, de forma consistente, encorajem o pensamento e o raciocínio de nível elevado do que naquelas em que as tarefas são habitualmente rotineiras e centradas nos procedimentos (Boaler e Staples, 2008; Hiebert e Wearne, 1993; Stein & Lane, 1996)”.
> 3. As tarefas de grande exigência cognitiva são as mais difíceis de implementar devidamente e, muitas vezes, transformam-se noutras, de menor exigência, durante a sua utilização no ensino (Stein, Grover & Henningsen, 1996; Stigler & Hiebert, 2004).” (p. 17)

Frequentemente, os professores devem selecionar e propor tarefas que promovam o raciocínio e a resolução de problemas, desta forma, os alunos vão ter oportunidade de se envolverem em pensamento de nível elevado (NCTM, 2017).

Para Christiansen e Walther (1986), a proposta de tarefas e a condução da sua resolução na sala de aula são aspetos determinantes na forma como se ensina Matemática: “A tarefa torna-se o objeto da atividade dos alunos e a proposta de tarefas em conjunto com as ações a elas respeitantes realizadas pelo professor constitui o principal método pelo qual se espera que a Matemática seja transmitida aos alunos” (p. 224). Ponte e Serrazina (2000) referem que uma tarefa proposta pelo professor, tem de ser interpretada pelo aluno e pode originar diversas atividades, dependendo da disposição do aluno e do ambiente da sala de aula. Para Ponte (2014), o professor tem de organizar para os seus alunos sequências de tarefas específicas, de modo a que estes possam atingir os objetivos de aprendizagem previstos. Ponte (2005) refere ainda que, para além da diversificação das tarefas, é importante que estas proporcionem um percurso de aprendizagem coerente, que permita aos alunos a construção dos conceitos, a compreensão dos procedimentos, o conhecimento das formas de representação relevantes e das conexões de cada conceito dentro da Matemática e com outros domínios. Para que essa aprendizagem ocorra é necessário selecionar as tarefas e sequenciá-las adequadamente de modo a promover um percurso de trabalho favorável às aprendizagens dos alunos (Ponte & Serrazina, 2009). Também Canavarro (2011) reforça que o professor deve selecionar as tarefas tendo em vista proporcionar aos alunos aprendizagens matemáticas sofisticadas, que permitam ir além da aplicação de conceitos e treino de procedimentos.

Ponte (2005) considera que duas dimensões fundamentais das tarefas são o seu grau de desafio matemático e o seu grau de estrutura. O grau de desafio matemático depende da perceção da dificuldade da questão, variando entre reduzido e elevado. Por sua vez, o grau da estrutura varia entre aberto e fechado. Cruzando as duas dimensões, obtêm-se quatro tipos de tarefas: (i) exercício (tarefa fechada e de desafio reduzido); (ii) problema (tarefa fechada, com desafio elevado); (iii) investigação (tarefa aberta, com desafio elevado), e (iv) exploração (tarefa aberta, com desafio reduzido). Este autor destaca que as tarefas de natureza mais acessível (explorações, exercícios), possibilitam a todos os alunos um elevado grau de sucesso, contribuindo para o desenvolvimento da sua autoconfiança. Vale (2009) refere que as tarefas podem ser bastante diversificadas relativamente à sua natureza, contexto, assunto, conexões e processos cognitivos. Uma tarefa pode ter um caráter mais rotineiro, ajudando à consolidação cognitiva de conhecimentos e destrezas já adquiridos mas, neste caso, muito dificilmente contribuirá para o desenvolvimento de novo conhecimento, ou poderá ter um caráter problemático para os alunos, dependendo do grau subjetivo de dificuldade que cada um sente (Ponte & Serrazina, 2000). Assim, estes autores apontam que na base do ensino deve estar a realização de tarefas não rotineiras que proporcionem ao aluno a construção de um novo conhecimento e o reconhecimento e avaliação pelo aluno do conhecimento adquirido anteriormente, assim como a organização e reestruturação num campo de conhecimentos mais amplo.

A experiência de ensino realizada assenta na importância da tarefa e no seu contributo para a aprendizagem da Matemática. As seis tarefas (em anexo) propostas para o estudo foram elaboradas pelo investigador, considerando ainda que de acordo com as Aprendizagens Essenciais (ME, 2018), os alunos devem:

> - Realizar tarefas de natureza diversificada (projetos, explorações, investigações, resolução de problemas, exercícios, jogos);
> - Explorar, analisar e interpretar situações de contextos variados que favoreçam e apoiem uma aprendizagem matemática com sentido (dos conceitos, operações, propriedades, regras e procedimentos matemáticos);
> - Resolver e formular problemas, analisar estratégias variadas de resolução, e apreciar os resultados obtidos;

- Comunicar utilizando linguagem matemática, oralmente e por escrito, para descrever, explicar raciocínios, procedimentos e conclusões;
- Utilizar materiais manipuláveis estruturados e não estruturados e instrumentos variados, incluindo os de tecnologia digital.

Todas as tarefas envolvem a exploração de sequências pictóricas crescentes. No âmbito do trabalho com sequências, Barbosa, Vale e Palhares (2011) referem que o professor para além de selecionar e concretizar tarefas que proporcionem a aprendizagem dos alunos, deve promover a oportunidade de usarem diversas representações, descobrirem regularidades, descrever a sequência oralmente e por escrito, continuarem uma sequência, prever termos de uma sequência e generalizarem.

Em sequências crescentes, os termos ou elementos são diferentes, pelo que cada termo da sequência depende do termo anterior e da sua disposição na sequência, designada por ordem do termo. Tratando-se de sequências pictóricas, os seus termos são formados por objetos que assumem uma configuração pictórica (Ponte, Branco & Matos, 2009). Estes autores referem que "os alunos trabalham com sequências pictóricas e numéricas e que na análise de uma sequência pictórica identificam regularidades e descrevem características locais e globais das figuras que a compõem e também da sequência numérica que lhe está diretamente associada" (p. 40). Referem ainda que o trabalho com sequências pictóricas "envolve a procura de regularidades e o estabelecimento de generalizações e que a descrição dessas generalizações em linguagem natural exige uma grande capacidade de abstração" (p. 40), evidenciando-se as capacidades de comunicação e raciocínios matemáticos. A gradual representação de um modo formal, através de símbolos matemáticos corretos, promove a compreensão desses símbolos e a linguagem algébrica (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Para a elaboração das tarefas nesta proposta foram considerados os seguintes aspetos:

- o modo como a sequência pictórica é apresentada;
- a estrutura matemática subjacente à sequência numérica que se associa à sequência numérica;
- a ordem pela qual cada tipo de sequência é apresentado;
- contemplar de questões relativas a termos próximos e a termos distantes;
- contemplar de questões que visam a inversão de raciocínio para saber se determinado valor pertence ou não à sequência;
- possibilitar o uso de diferentes representações;
- levar os alunos a estabelecer uma generalização algébrica.

As seis tarefas são agrupadas em três pares de tarefas distintos relativamente à estruturas matemáticas da sequência numérica. Sendo uma turma de 4.º ano e pretendendo-se que os alunos expressem a generalização algébrica, são apenas consideradas sequências lineares, ou seja, cuja expressão algébrica é do tipo $n+b$; $an$, e $an+b$ ($a$ diferente de 1 para não ser uma situação já contemplada), com $a$ e $b$ positivos e diferentes de zero. As tarefas de cada par, apesar de apresentarem a mesma estrutura matemática, diferem nos elementos pictóricos que as constituem. Em cada par, uma sequência é construída com fósforos e na outra os seus termos são desenhos. Nas tarefas cujos enunciados apresentam sequências pictóricas crescentes formadas por fósforos, é disponibilizado material manipulável para que os diversos grupos possam realizar representações ativas. Na resolução das tarefas é importante considerar a forma como os alunos interpretam e identificam as diversas representações dos enunciados e como produzem as suas próprias representações e estratégias. Estas estratégias têm o objetivo de reconhecer, identificar, completar, descobrir, continuar e generalizar sequências. As sequências são pictóricas crescentes, pelo que cada termo da sequência não surge como uma repetição de um outro termo que dista deste $k$ ($k$ é o cardinal do conjunto de elementos que se repete ciclicamente), mas cada termo tem relação com o anterior ou com o que lhe segue, existindo variação na constituição de cada termo. Pretende-se que os alunos façam generalizações, relacionando de modo direto a ordem do termo com a sua estrutura pictórica, e assim obtenham uma representação em linguagem natural ou algébrica simbólica relativa à sequência numérica que se associa à pictórica.

As tarefas são concretizadas no primeiro tempo da manhã pois, segundo a professora Catarina, é neste período que as crianças estão mais concentradas. Esta experiência de ensino é realizada entre os meses de fevereiro e maio de 2019, em aulas de uma hora e meia (o tempo de duração é flexível, atendendo ao desenrolar da tarefa). Para a realização destas tarefas, as aulas são organizadas por três momentos fundamentais: a introdução da tarefa, o trabalho autónomo dos alunos e a discussão coletiva com orquestração produtiva das discussões matemáticas (Canavarro, 2011). A organização dos grupos de trabalho encontra-se no anexo. Para cada aula é realizado um plano de aula (Anexo). A organização das tarefas é sistematizada na tabela T1:

| Designação | Estrutura matemática | Apresentação dos termos | Data de concretização |
|---|---|---|---|
| Tarefa 1 - Pá | $n+b$ | Representação ativa com fósforos | 21-02-2019 |
| Tarefa 2 - Sequência de "S" | $n+b$ | Representação iconográfica | 27-02-2019 |
| Tarefa 3 - Árvores | $an$ | Representação ativa com fósforos | 03-05-2019 |
| Tarefa 4 - Degraus de quadrados | $an$ | Representação iconográfica | 08 -05-2019 |
| Tarefa 5 - Sequência de "A" | $an+ b$ | Representação ativa com fósforos | 22-05-2019 |
| Tarefa 6 - Sequência de "L" | $an + b$ | Representação iconográfica | 24-05-2019 |

Tabela T1. Organização das tarefas

### 3.4. Dinâmica da sala de aula

A experiência de ensino segue uma abordagem de ensino exploratório da Matemática (Ponte, 2005), em que o papel do professor é menos interventivo, focando-se na apresentação da tarefa, no trabalho autónomo dos alunos e na condução produtiva das discussões matemáticas que marcam a forma de trabalho na sala de aula.

O ensino exploratório em Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão coletiva (Canavarro, 2011). Para esta autora, os alunos têm a possibilidade de ver os procedimentos e conhecimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. Para Ponte (2005), na estratégia de ensino-aprendizagem de cariz exploratório, o professor tem um papel menos interventivo. Apesar de existirem momentos centrados no professor, mais expositivos e de sistematização das aprendizagens, é a exploração realizada pelos alunos que realmente marca a forma de trabalho na sala de aula.

Para desenvolver este trabalho com a turma, a aula organiza-se em diferentes momentos do ensino exploratório e há um grande enfoque na discussão coletiva, pelo que são consideradas as cinco práticas de orquestração da discussão (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008). Estas cinco práticas que visam proporcionar ao professor melhores condições para orquestrar produtivamente essas mesmas discussões são: (i) Antecipar; (ii) Monitorizar; (iii) Selecionar; (iv) Sequenciar, e (v) Estabelecer conexões. Assim, a organização da discussão coletiva inicia-se na planificação ao antecipar o trabalho dos alunos, sendo esta uma das componentes mais relevantes (Canavarro, 2011). Corresponde a uma previsão por parte do professor de como os seus alunos irão abordar as tarefas no sentido de relacionar o que eles poderão fazer com o objetivo matemático da aula. Há uma dedicação por parte do professor em prever a interpretação e envolvimento dos alunos na tarefa.

A aula inicia com uma breve referência às regras e normas do trabalho de grupo, negociando o tempo relativamente aos momentos da aula: trabalho autónomo (30 minutos), discussões matemáticas (45 minutos), estabelecimento de conexões e síntese (15 minutos).

Na introdução da tarefa pretendo ser sucinto e motivador, contagiando-os com entusiasmo para tentar captar a atenção. O enunciado da tarefa é projetado e enquanto distribuo o trabalho a desenvolver pelos diversos grupos vou explicando os momentos da aula. Leio o enunciado, esclarecendo eventuais dúvidas que possam surgir por parte dos alunos na compreensão de algum vocabulário específico. É fundamental que todos os alunos tenham completamente esclarecido as dúvidas, no sentido de interpretarem corretamente a tarefa e se envolvam nos respetivos trabalhos. Ainda que existam algum esclarecimento, este tem sempre em conta não apresentar elementos que possam induzir a estratégia dos alunos ou reduzir o nível de desafio da tarefa.

Durante o trabalho autónomo, monitorizo o que os grupos fazem sem me aproximar demasiado. Nesse momento, para além de assumir o papel de orientador, tento envolver os alunos e pretendo perceber o que fazem, sem os interromper. Perante eventuais interpelações objetivas de diversos grupos sobre o "que é para fazer", tento resistir em explicitar algum procedimento, optando por questioná-los com a expectativa de os fazer pensar. Quando verifico que o grupo conseguiu adotar determinado caminho, afasto-me e vou recolhendo informações sobre as resoluções que vão surgindo. Perante grupos que fazem uma abordagem superficial da tarefa, interrogo-os, para que repensem os procedimentos e que a tornem mais profunda. Quando faltam cerca de dez minutos para a conclusão do trabalho autónomo, aviso os alunos do tempo que têm para concluir a tarefa e continuo a circular pela sala no sentido de completar a recolha de informações. Ao monitorizar o trabalho dos alunos aproprio-me das estratégias e resoluções dos grupos com o propósito de avaliar o seu potencial para a aprendizagem matemática a desenvolver na turma. Enquanto ouço e observo os diferentes grupos, avalio o valor matemático das suas ideias e das representações usadas. Neste sentido, mais do que dar respostas aos alunos, nesse momento da aula é determinante recolher informações de como estão a trabalhar e que ideias matemáticas estão a explorar. Considero a diversidade de estratégias que emergem e erros ou ideias erróneas que é relevante discutir coletivamente, assim como, outros aspetos que considere relevantes, realçando estratégias que pela sua singularidade devem ser apresentadas e discutidas. Perante treze grupos e treze resoluções possivelmente diferentes, questiono-me sobre quais devem ser discutidas coletivamente e que contribuem para esclarecer aspetos matematicamente significativos da exploração, bem como a melhor ordem para as sequenciar. A decisão da seleção e sequenciação surge, como sugere Canavarro (2011) nos minutos finais do trabalho autónomo e corresponde à identificação de grupos cujas resoluções são importantes para partilhar com toda a turma e ao percurso de exploração das ideias matemáticas que o professor entende ser o mais adequado. A seleção pressupõe a adoção de vários critérios a escolher, por exemplo: uma resolução que apresenta um erro recorrente a esclarecer; uma resolução particular que se distingue e acrescenta compreensão e/ou ajuda a atingir o objetivo matemático da aula. Por seu lado, a sequenciação tem em consideração começar com uma resolução que permita tornar a discussão mais acessível a todos os alunos, pois permite esclarecer aspetos fulcrais e essenciais que suportam ideias mais sofisticadas, independentemente a correção dessa resolução. A exploração matemática de um erro pode ser bastante esclarecedora e enriquecedora, quer para os alunos que erraram quer para os que resolveram corretamente. Por fim, a prática de estabelecer conexões, surge após a discussão das diferentes resoluções e, muitas vezes, pode começar durante a mesma. Canavarro (2011) realça que o propósito das discussões não é realizar um desfile de apresentações separadas de diferentes respostas ou estratégias de resolver uma dada tarefa. O objetivo das discussões é relacionar as apresentações com vista ao desenvolvimento coletivo das ideias matemáticas válidas que resumam as aprendizagens matemáticas dos alunos. Desta forma, os alunos são convidados "a analisar, comparar e confrontar as diferentes resoluções apresentadas, identificar o que têm de semelhante ou de distinto, quais são as potencialidades e mais valias de cada uma delas, esperando que desta meta-análise retirem heurísticas para abordar tarefas futuras" (p. 16).

A discussão na sala de aula é considerada por Rivera e Becker (2009) um momento fundamental, em que o professor deve incentivar os alunos a sintetizar as diferentes estratégias apresentadas e a propor uma estratégia diferente dessas. Na discussão é possível comparar resultados, discutir estratégias, exprimir dúvidas e estabelecer conceitos e representações matemáticos (Ponte, 2009). Ponte, Matos e Branco (2009) consideram este momento em coletivo determinante e referem que é refletindo sobre o trabalho feito, o seu e o dos colegas, comparando as suas ideias com as dos outros, argumentando e analisando argumentos, que os alunos aprofundam e consolidam a sua aprendizagem. Cada grupo de trabalho, de uma forma organizada, comunica as estratégias do seu grupo relativamente a cada uma das questões ou apenas em questões específicas da tarefa. Barbosa et. al (2011) enfatizam a discussão em grande grupo, referindo que os alunos são levados a analisar e discutir diferentes conjeturas e justificações. Também Ponte (2005) valoriza os momentos de discussão, em que os alunos apresentam "conjeturas e conclusões, apresentam as justificações e questionam-se uns aos outros e que o professor aproveita para procurar que se clarifiquem os conceitos e procedimentos, se avalie o valor dos argumentos e se estabeleçam conexões dentro e fora da matemática" (p. 24).

Para concluir as aulas, professor e alunos devem fazer uma reflexão e síntese das ideias principais aprendidas na atividade realizada (Ponte 2005, 2009). Esta sistematização decorre da discussão coletiva. Para Canavarro et al., (2012), a fase de sistematização é, para todos os alunos em sala de aula, uma relevante ocasião de aprendizagem matemática. É na fase da sistematização que o professor assume um papel mais diretivo para clarificar e institucionalizar as principais aprendizagens decorrentes do trabalho desenvolvido e estabelecer conexões com conhecimentos e procedimentos já estudados (Canavarro, 2011; Canavarro et al., 2012; Oliveira et al., 2013).

# Capítulo 4

# Metodologia de investigação

Neste capítulo apresento opções metodológicas do estudo, considerando o objetivo do estudo e os participantes já apresentados, e os processos de recolha e análise dos dados, bem como os aspetos de natureza ética que orientaram a realização do estudo.

## 4.1. Opções metodológicas

Este estudo tem como objetivo compreender o contributo de uma proposta pedagógica para o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos de 4.º ano do 1.º Ciclo do Ensino Básico, que segue uma abordagem de ensino exploratório e envolve a exploração de tarefas com sequências pictóricas crescentes que diferem nos elementos pictóricos que as constituem na estrutura matemática subjacente à sequência numérica que se associa à sequência pictórica. Assim sendo, pretendo conhecer e identificar as diversas estratégias e generalizações que os alunos utilizam para descrever sequências, identificando, quando possível, a evolução demonstrada na análise das sequências e dificuldades sentidas, considerando o percurso da proposta pedagógica.

Esta investigação incide sobre a minha prática profissional, no sentido de "compreender bem os modos de pensar e as dificuldades próprias dos alunos" (Ponte, 2005, p. 5). Para Ponte (2002), a investigação dos profissionais sobre a sua prática pode ser importante por várias razões. Antes de mais, ela contribui para o esclarecimento e resolução dos problemas, proporcionando o desenvolvimento profissional dos respetivos atores. A realização do estudo irá contribuir para uma melhor compreensão da dinâmica de realização de tarefas com vista à promoção do pensamento algébrico dos alunos e do papel de diferentes elementos da tarefa que contribuem para o desenvolvimento desse pensamento. A investigação sobre a prática profissional, a par da sua participação no desenvolvimento curricular, constitui um elemento decisivo da identidade profissional dos professores (Ponte, 2002). Alarcão e Roldão (2008) referem que a construção e desenvolvimento da identidade profissional é um processo individual, único, com forte influência contextual, condicionado por referências passadas e expetativas futuras. Berger e Luckmann (1976, referidos por Alarcão e Roldão, 2008), referem a identidade profissional do professor como um produto de várias e sucessivas socializações. Estes autores indicam um processo de socialização primária e secundária, em que a socialização primária, entendida como identidade pessoal, refere-se ao percurso do indivíduo como aluno (saberes de base), que abarca representações dos seus professores. A socialização secundária (identidade social), refere-se à transição do jovem adulto a profissional, ou seja, a aquisição de saberes profissionais, em que a eficácia desta depende da relação com a socialização primária. A nível do ensino da Matemática, no 1.º ciclo do ensino básico (ensino primário), a minha socialização primária incidiu quase exclusivamente na resolução rotineira de exercícios e memorização de procedimentos, aspetos marcantes que me acompanharam ao longo dos anos. A professora, que acompanhou a turma durante quatro longos anos, detentora de todo o saber académico e de uma forma somente expositiva e unidirecional, limitava-se a indicar a forma e regras de resolução dos exercícios. Não havia qualquer espaço para uma discussão coletiva, para uma simples troca de ideias ou de estratégias. Os alunos perfilavam-se para, individualmente, resolver um algoritmo ou para escrever uma tabuada. Desta forma, pretendo fazer um projeto baseado no ensino exploratório da Matemática, que apele às boas práticas adquiridas na socialização secundária e que esta se evidencie claramente em relação à socialização primária.

Com este estudo pretendo compreender as potencialidades de uma sequência de tarefas na compreensão das sequências por parte dos alunos e na sua capacidade de generalização, inseridas numa abordagem de ensino exploratório. Deste modo viso potenciar e melhorar a capacidade de generalização, seguida de uma reflexão sobre eventuais contributos para a melhoria da prática pedagógica, pois, segundo Oliveira e Serrazina (2002), a reflexão faculta aos professores possibilidades para o seu desenvolvimento, tornando-os melhores profissionais, mais responsáveis e conscientes. Estas autoras defendem que “a prática reflexiva surge como um modo possível dos professores interrogarem as suas práticas de ensino. A reflexão fornece oportunidades para voltar atrás e rever acontecimentos e práticas” (p. 1). Além disso, as autoras destacam que, “os professores que refletem em ação e sobre a ação, estão envolvidos num processo investigativo, não só tentando compreender-se a si próprios melhor como professores, mas também procurando melhorar o seu ensino" (p. 34). Ponte (2002) refere ainda que a investigação sobre a prática é tida com "um processo fundamental na construção do conhecimento sobre essa mesma prática sendo vista como uma atividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem ativamente" (p. 6). Alarcão (2001) também sustenta esta ideia referindo que o bom professor tem de ser também um investigador, desenvolvendo uma investigação em íntima relação com a sua função de professor.

Ponte (2002) refere dois tipos de objetivos para a realização de investigação sobre a prática: (i) modificar algum aspeto da prática, identificada essa necessidade, e (ii) compreender a natureza dos problemas que interferem com essa prática, com o intuito de posteriormente definir uma estratégia de ação. Para Beillerot (2001, referido por Ponte, 2002), uma investigação deve seguir uma metodologia rigorosa, contribuir para novos conhecimentos no âmbito da temática em estudo e ser tornada pública. Ponte (2002) evidencia o contributo para o desenvolvimento profissional que terá a investigação sobre a prática, bem como para o conhecimento sobre o ensino-aprendizagem do profissional envolvido e de outros professores e envolvidos no contexto educativo. É com esse sentido de contributo para o meu desenvolvimento profissional e também de produção de conhecimentos novos que podem ser úteis para outros professores do 1.º ciclo do ensino básico. Esta investigação contempla os quatro momentos principais indicados por Ponte (2002): i) formulação do problema ou das questões do estudo; ii) recolha de dados que permitem responder a esse problema, iii) interpretação dos dados, iv) divulgação dos resultados e conclusões.

O presente estudo segue uma abordagem qualitativa, de natureza interpretativa (Bogdan & Bicklen, 1994), focado numa proposta pedagógica, no âmbito da prática profissional de um docente que assume simultaneamente o papel de investigador e de professor numa turma em que não é o professor titular.

Este estudo pretende compreender o contributo de uma proposta pedagógica para o desenvolvimento do pensamento algébrico em alunos do 4.º ano no trabalho com tarefas que envolvem sequências pictóricas crescentes, tem o foco nos procedimentos utilizados pelos mesmos, procurando apreender as perspetivas dos participantes, características da investigação qualitativa que focam essencialmente o processo e importância dada ao significado (Bogdan & Biklen, 1994). Segundo estes autores, os investigadores qualitativos pretendem "compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados" (p. 70). Vale (2004) defende a adoção da investigação qualitativa quando se pretende a descrição e explicação pormenorizada de fenómenos, privilegiando os processos mais do que os produtos.

Bogdan e Biklen (1994) apontam cinco características essenciais para a investigação qualitativa, que fundamentam a escolha de uma metodologia qualitativa neste estudo: (i) a fonte direta dos dados é o ambiente natural, neste caso a sala de aula, sendo o investigador o principal instrumento de recolha de dados; (ii) os dados são de natureza descritiva, recolhidos por diversas fontes; (iii) o foco do investigador está mais centrado no processo que nos resultados, nomeadamente, em compreender o modo como os participantes desenvolveram as capacidades de representação e generalização, ao longo das tarefas, assim como identificar as estratégias utilizadas pelos diferentes grupos; (iv) a análise de dados é feita de modo indutivo, aspeto que conduziu a uma categorização dos mesmos, possibilitando descrever as estratégias utilizadas pelos participantes, bem como as suas dificuldades, e (v) o investigador tem o foco no significado das ações atribuído pelos participantes, estando este aspeto integrado na recolha de dados. A recolha de dados visa compreender a experiência sentida pelos participantes, não se pretende testar hipóteses, assim sendo, a metodologia é do "tipo interpretativo, visto não ser anterior aos dados, mas, surge a partir desses mesmos dados" (Coutinho, 2011, p. 27). Deste modo, a recolha de dados procura ser rigorosa, todas as produções escritas dos alunos são recolhidas, assim como dados descritivos, nomeadamente no diário de bordo elaborado por mim enquanto investigador, são realizadas transcrições dos diálogos e discussões das aulas (suporte áudio e vídeo). Para Bogdan e Biklen (1994), os investigadores qualitativos "tentam analisar os dados em toda a sua riqueza, respeitando, quanto o possível, a forma em que estes foram registados ou transcritos" (p. 48). Deste modo, os resultados da investigação contêm extratos dos diálogos com os alunos e entre eles e das respostas dadas nos registos escritos, no sentido a serem interpretados, respeitando a forma tal como foram produzidos.

A proposta pedagógica visa o envolvimento dos alunos, pois para além de lhes permitir reinventar a Matemática através das suas experiências do senso comum (numa fase inicial), promove o aparecimento, desenvolvimento e uma progressiva evolução de modelos gerados pelos alunos (Rivera & Becker, 2008). As tarefas são apresentadas à turma oralmente (acompanhadas visualmente no quadro interativo) e por escrito, A observação participante das aulas tem como propósito a recolha de evidências da relação entre os alunos e da relação que estes mantêm com as tarefas propostas. Para além destes aspetos, possibilita-me também saber o que os alunos estão a fazer e o modo como estão a pensar.

## 4.2. Aspetos de natureza ética

Neste estudo, são tidos em conta os aspetos de natureza ética e todos os procedimentos legais relativamente à autorização para a realização da investigação.

Bogdan e Biklen (1994) referem que a condução de uma investigação qualitativa assemelha-se mais ao estabelecimento de uma amizade do que de um contrato. Para estes autores, os intervenientes são ativos na regulação da relação, tomando decisões relativamente à sua participação. Indicam princípios éticos que orientam a investigação da maioria dos investigadores qualitativos:

i) As identidades dos sujeitos devem ser protegidas, para que a informação que o investigador recolhe não possa causar-lhes qualquer tipo de transtorno ou prejuízo.

ii) Os sujeitos devem ser tratados com respeito e de modo a obter a sua cooperação na investigação.

iii) Ao negociar a autorização para efetuar um estudo, o investigador deve ser claro e explícito com todos os intervenientes relativamente aos termos do acordo, devendo respeitá-lo até à conclusão do estudo.

iv) O investigador deve ser autêntico quando escreve os resultados, ou seja, ainda que as conclusões a que chega possam, por razões ideológicas, não lhe agradar, e se possam verificar pressões por parte de terceiros para apresentar alguns resultados não contemplados nos dados, a devoção e fidelidade aos dados obtidos, são as características mais importantes de um investigador.

Para complementar esses princípios éticos, Bogdan e Biklen (1994) referem que: "Ainda que possam existir linhas de orientação para a tomada de decisão de carácter ético, as decisões éticas complexas são da responsabilidade do investigador, baseiam-se nos valores deste e na sua opinião relativa ao que pensa serem comportamentos adequados"(p.76).Assim, antes de iniciar o projeto com a turma, reuni com o Diretor do Agrupamento de Escolas no sentido de lhe explicar os objetivos do estudo e solicitar autorização (em anexo) para a implementação do projeto na escola em questão. Apresentei-lhe a Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (Deliberação nº 453/2016). O Diretor mostrou-se disponível para colaborar desde que a professora titular de turma estivesse de acordo com a implementação do estudo e que os alunos fossem tratados com respeito e ocultas as suas identidades. O Diretor alertou também para a importância de informar os encarregados de educação dos alunos relativamente à presença do investigador na sala de aula e eventuais autorizações para os registos de áudio e vídeo, assegurando questões éticas e de anonimato, o que foi atendido.

No sentido de ter o consentimento informado de todos os participantes, foram feitos os pedidos de autorização (em anexo) aos encarregados de educação e ao diretor do agrupamento de escolas onde decorreu o estudo, em que foram dados a conhecer de uma forma clara e explícita, os objetivos do estudo e respetivas implicações da participação aos participantes e respetivos encarregados de educação antes da implementação do mesmo. Deste modo, foram enviados aos vinte e seis encarregados de educação dos respetivos alunos, um documento a explicar os objetivos do estudo, garantindo as questões inerentes ao anonimato, a solicitar autorização para a captura de imagens que pudessem conter os seus educandos (em anexo).

De modo a garantir que a identidade dos participantes é protegida, não é indicado o nome da escola, os nomes da professora e dos alunos são ocultados. Como já referido, a professora assume aqui o nome fictício de Catarina e os alunos são identificados por nomes fictícios por si criados, sob a devida orientação e sugestão da professora titular. Assim, sempre que se explorava uma tarefa na sala de aula, os alunos colocavam uma etiqueta identificativa com os respetivos nomes fictícios.

### 4.3. Recolha de dados

A recolha de dados, como já foi referido, ocorre no ambiente natural para os participantes, a sala de aula, e o investigador é o principal instrumento dessa recolha, desempenhando o papel de observador participante. Os dados são recolhidos, além da observação participante, por análise documental, sendo usado o registo em diário de bordo, registos fotográficos, áudio e vídeo e as produções escritas elaboradas pelos alunos aquando da resolução das tarefas propostas. As aulas da proposta pedagógica são totalmente gravadas em áudio e em vídeo. A este respeito, Ponte (2002) refere que "é também importante que os dados sejam recolhidos, sempre da mesma forma, com procedimentos claros e bem definidos, de modo a possibilitar a sua posterior interpretação" (p. 15).

A observação é uma técnica de recolha de dados comum em estudos interpretativos. Neste estudo, o processo de observação prevê inúmeras interações entre investigador e participantes, estando estes conscientes do objetivo do estudo (Ludke & André, 1986). A observação das aulas permite a obtenção de informação relativa às aprendizagens dos alunos, às suas capacidades e aos seus procedimentos relativamente ao raciocínio e resolução de problemas (Ponte & Serrazina, 2000). A observação participante é uma das estratégias mais representativas da investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994). O investigador regista no diário de bordo "os acontecimentos relevantes que vão surgindo no decurso do trabalho, bem como as ideias e preocupações que lhe vão surgindo. Na análise destes dados usa-se uma variedade de técnicas, incluindo a análise de conteúdo e a análise de discurso" (Ponte, 2002, p. 14). Este documento que contem o registo dos principais acontecimentos ocorridos durante as aulas, assumindo um caráter descritivo e reflexivo. Assim sendo, contem elementos importantes para a reestruturação e reformulação das tarefas futuras, bem como do seu modo de exploração nas aulas. A fonte direta dos dados é o ambiente natural onde decorre a ação, local onde o investigador desempenha também o papel de professor, tratando-se, portanto, de um estudo com observação participante, aspeto que dificulta a recolha de dados. Durante a observação e implementação das tarefas, é difícil o registo de notas relativamente a dinâmicas importantes da sala de aula. Só após o término de cada aula, consigo completar o respetivo diário de bordo, pois antes de cada aula, escrevo sobre as minhas expectativas e só depois registo aspetos pertinentes, nomeadamente o registo de comentários, observações pessoais, e outros pontos importantes para a investigação, completando assim com os aspetos mais significativos da exploração de cada tarefa e com a reflexão da sua implementação e da minha prática pedagógica. As notas foram sistematicamente registadas ao longo das seis tarefas no diário de bordo, cuja estrutura do respetivo guião está em anexo.

A análise documental faz-se das transcrições dos registos áudio e vídeo das aulas e dos documentos produzidos pelos alunos. Os registos áudio e vídeo permitem a obtenção de pormenores do trabalho em grupo e da discussão em grupo-turma que muito provavelmente passam despercebidos durante a concretização das tarefas, pois o meu foco está centrado no trabalho da sala de aula. Branco (2008) refere que estes suportes de recolha de dados são uma fonte rica de informação, contribuindo bastante para a compreensão de diversos fenómenos da dinâmica da sala de aula. Clements (2000) refere que a gravação vídeo pode ser um instrumento importante atendendo à sua flexibilidade em recolher e guardar informação que captura e à complexidade de interações, permitindo aos investigadores reexaminar os dados sempre que necessário. Os dados são ainda recolhidos pelos registos escritos produzidos pelos alunos. Segundo Bogdan e Biklen (1994), a utilização destes dados é um aspeto importante nos estudos em que a tónica principal é a observação participante. Leio e analiso as evidências escritas realizadas pelos alunos e confronto-as com os respetivos registos áudio e vídeo, facto que me permite comparar o trabalho escrito com aquilo que apresentam aquando da discussão coletiva.

### 4.4. Análise dos dados

A análise de dados visa, segundo Bogdan e Biklen (1994), a organização sistemática os materiais recolhidos "que foram sendo acumulados com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou" (p. 205). Considerando a natureza do estudo, em que consiste no desenvolvimento de uma sequência de seis tarefas, onde participam 26 alunos (13 pares), os dados recolhidos são muito diversificados. A análise de dados do presente estudo assume um caráter interpretativo, procurando evidenciar factos importantes, no sentido de ajudar a responder às questões da investigação. A análise de dados procura interpretar e dar sentido ao material disponível a partir da respetiva recolha, compreender fenómenos através de padrões oriundos da recolha de dados, organizar e subdividir os dados, sintetiza-los, procurar padrões, descobrir o que é relevante, o que deve ser aprendido e o que se vai comunicar (Bogdan & Biklen, 1994).

Atendendo ao objetivo do estudo, assim como à fundamentação teórica, a análise dos dados é realizada através da interpretação do discurso oral dos alunos durante a realização da tarefa em grupo e na discussão coletiva que impreterivelmente se segue. Também é alvo de análise o trabalho escrito dos alunos e o descrito nos diários de bordo, analisando os respetivos conteúdos e comparando a informação neles contidos com as evidências referidas nos registos áudio e vídeo. Dado o volume de informação recolhida e o seu cunho essencialmente descritivo, é necessário organizar e sintetizar essa informação no sentido de possibilitar a sua análise, procurando, como já foi referido, identificar aspetos relevantes a cada uma das questões da investigação.

A análise dos dados obtidos baseia-se nalguns elementos referidos no quadro conceptual, nomeadamente as representações, estratégias de resolução, estratégias de generalização utilizadas e dificuldades manifestadas pelos alunos perante as tarefas propostas. Para além das tabelas que se encontram em anexo, com a recolha da informação contida nas produções escritas dos alunos e que apresentam as diversas estratégias de resolução e categorias de generalização, são também apresentadas outras evidências e conclusões do estudo de uma forma descritiva, igualmente resultantes da análise dos dados.

Em relação às representações matemáticas utilizadas pelos alunos nas tarefas propostas, envolvendo sequências pictóricas crescentes, os dados obtidos estão agrupados na categoria de representações externas, denominação sugerida através das representações indicadas por Valério (2005). Implícita a esta categoria encontram-se as representações designadas por *ativas* (gestual ou manipulação de material didático), *icónicas* (tabelas, gráficos, esquemas, diagramas, figuras, desenhos) e *simbólicas* (linguagem simbólica da Matemática: algarismos ou dígitos, sinais matemáticos, expressões numéricas ou algébricas, fórmulas) e a linguagem natural, escrita ou falada (língua materna, linguagem corrente da matemática) referidas por Bruner (1999), Ponte e Serrazina (2000) e por Ponte e Velez (2012). Bruner (1999) considera que a linguagem natural uma representação simbólica, contudo Goldin (2008) considera-a como um tipo de representação distinto das conceções formais. Assim sendo, neste estudo, a linguagem natural é analisada separadamente das outras representações simbólicas, quando utilizada oralmente ou por escrito pelos alunos para explicarem como encontraram termos mais distantes ou descobriram a lei de formação de uma sequência. Nos anos iniciais de escolaridade, a linguagem natural é tida como um meio privilegiado para os alunos expressarem as suas ideias e estratégias (Morais, 2012). As estratégias de raciocínio que podem ser utilizadas pelos alunos na generalização de sequências pictóricas crescentes, encontram-se agrupadas em quatro categorias: representação e contagem; aditiva; objeto inteiro; decomposição dos termos. As três primeiras estratégias representam tipos de estratégias construtivas, enquanto que a última estratégia representa um tipo desconstrutiva. Estas categorias são as denominações das estratégias apresentadas por Ponte, Branco e Matos (2009). Deste modo, são também utilizadas para a análise dos diversos dados recolhidos, relativamente às tarefas propostas e exploradas com os alunos. Por último, em relação às categorias de generalização, também abordadas no capítulo 2, recorre-se à categorização sugerida por Radford (2010). Este autor refere a existência de dois tipos de generalização de natureza distintas: aritmética e algébrica. A generalização de natureza algébrica divide-se em fatual, contextual ou simbólica. Estas categorizações também serão utilizadas para a análise dos dados recolhidos.

# Capítulo 5

# A experiência de ensino-aprendizagem

Neste capítulo apresento os resultados da investigação. O mesmo é formado por seis secções, cada uma correspondente a uma das tarefas que compõe a proposta pedagógica. Cada uma dessas secções é, por sua vez, subdividida em cinco tópicos. O primeiro apresenta características específicas da tarefa. Os três tópicos seguintes referem-se às dimensões indicadas no quadro conceptual, estratégias e representações, generalização e dificuldades, evidenciando-se as respetivas categorias que emergem em cada um deles. No último tópico faço uma breve reflexão sobre o desenvolvimento da tarefa na sala de aula.

Como é a primeira vez que os alunos trabalham e contatam com sequências pictóricas crescentes numa abordagem de exploração, explico no que consiste e como se desenvolve o trabalho, as dinâmicas de trabalho na sala de aula e as normas que assistem ao desenvolvimento das diversas tarefas. Em todas as tarefas as sequências são crescentes, pelo que cada figura não surge como uma repetição cíclica de um conjunto de elementos, mas os termos que constituem a sequência são diferentes e a respetiva constituição depende da sua ordem.

### 5.1. Sequência “Pá com fósforos” (Tarefa 1)

#### 5.1.1. Características da tarefa

Foram apresentados três termos de uma sequência pictórica que são formados por fósforos (Figura 3). Todos os termos têm uma parte que se mantém constante, formada por quatro fósforos e uma parte que varia em função da ordem do termo na sequência.

Para além do enunciado da tarefa distribuído por cada aluno, disponibilizei fósforos de modo a possibilitar a construção dos termos, caso necessitem desse suporte para os analisar. De seguida, li o questionamento no sentido de esclarecer e dissipar eventuais dúvidas, dando início ao trabalho em pequenos grupos.

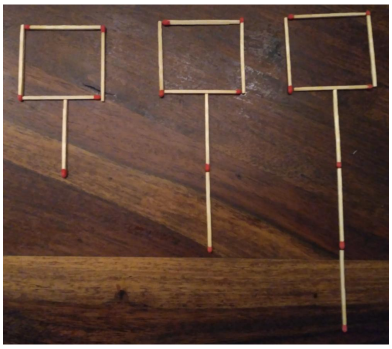


Figura 3 – Sequência pictórica,Tarefa 1.

#### 5.1.2. Estratégias utilizadas pelos alunos

**Termos próximos**

Na exploração inicial em grupo e atendendo aos registos produzidos, não se verificaram dificuldades na resolução da questão 1.1. da tarefa. Durante o trabalho autónomo, os alunos reproduziram a 4.ª figura de diferentes modos. Uns grupos desenharam a figura, outros usaram os fósforos para realizar a representação, tendo desenhado posteriormente. Deste modo, utilizaram representações externas, ativas a partir do recurso a objetos (figura 4 e figura 5) e icónicas quando desenharam a figura seguinte (figura 4) .

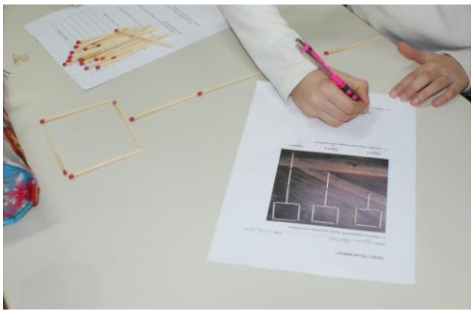


Figura 4 - Representação ativa, Grupo 3, Tarefa 1, Questão 1.1.

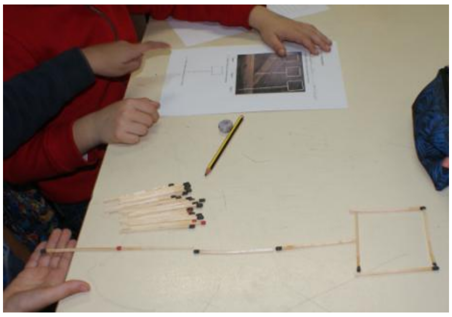


Figura 5 - Representação ativa, Grupo 12, Tarefa 1, Questão 1.1.

Figura 6 – Representação icónica, Grupo 1, Tarefa 1, Questão 1.1.

Todos os grupos desenharam corretamente a figura seguinte da sequência. Seis grupos procuraram desenhar corretamente os fósforos e consequentemente a figura, como é evidente na representação feita pelo grupo 13 (figura 7).

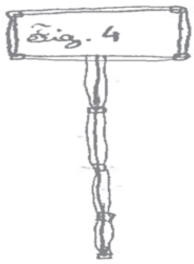



Figura 7 – Representação icónica, Grupo 13, Tarefa 1, Questão 1.1

Outros grupos (4 e 5) representaram os fósforos através de segmentos de reta com diferentes comprimentos e por vezes contíguos (figura 8). Na utilização da estratégia de representação e contagem, o rigor da representação podia de alguma forma condicionar as respostas à questão 1.2.

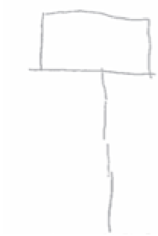


Figura 8 – Representação icónica, Grupo 4, Tarefa 1, Questão 1.1.

Alguns grupos registaram o número de fósforos em cada termo, utilizando a estratégia de representação e contagem. Três grupos utilizaram as figuras da sequência para sistematizar e organizar a informação relativa a cada uma delas. Como se verifica na figura 9, o grupo 10 utilizou a imagem da sequência para organizar a informação, utilizando a estratégia aditiva.

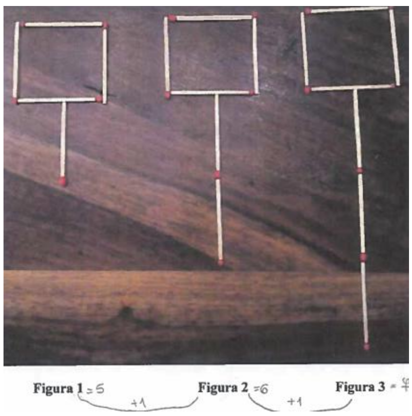



Figura 9 – Estratégia aditiva, Grupo 10, Tarefa 1, Questão 1.1.

No momento da discussão coletiva, os diversos grupos são convidados a refletir sobre a sequência pictórica crescente apresentada. Vários alunos, como se evidencia no diálogo seguinte, reconhecem que as diferentes figuras têm diferente número de fósforos e identificam o número mínimo de fósforos necessário para construir uma figura da sequência.

Prof. – As diferentes figuras têm o mesmo número de fósforos?
Afonso (grupo 3) – Não, diferentes... Têm diferentes número de fósforos!
Prof. – Então, figuras diferentes têm número de fósforos...
Francisco (grupo 6) – Diferentes.
[Joana (grupo 3), desenha a figura seguinte no quadro]
Prof. – Joana, quantos fósforos tem a primeira figura?
Joana – 5.

Prof. – A segunda figura tem...
Vários alunos – 6.
Prof. – A figura 3 ...
Vários alunos – 7.
Prof. – Qual o menor número de fósforos necessário para construir uma figura? ... uma pá?
João (grupo 2) – O menor número é o 5.
Carolina (grupo 9) – Se for só 4, fica só a pá...sem o cabo.

De seguida é pedido que os alunos indiquem o número de fósforos que compõem a 4.ª figura. Durante o trabalho autónomo, para responder à questão 1.2., verifiquei que grande parte dos grupos se limitou a contar o número de fósforos desenhados na questão 1.1. O uso da estratégia representação e contagem ficou evidente no momento da discussão, em que a maioria dos alunos referiu que contou o número de fósforos desenhados na figura da questão anterior, como se exemplifica na imagem (figura 10) e no diálogo seguinte:

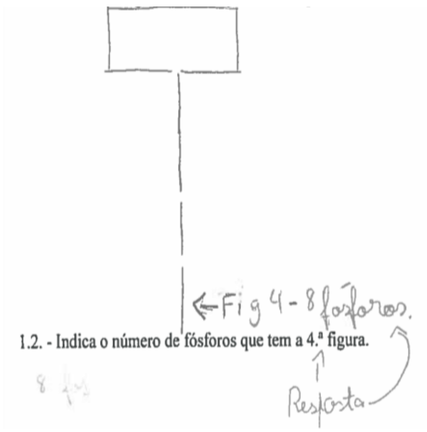


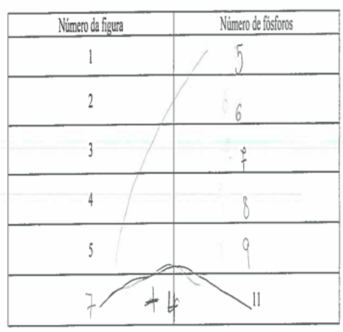

Figura 10 – Estratégia representação e contagem, Grupo 7, Tarefa 1, Questão 1.2.

Prof. – Então, qual o número de fósforos da figura 4?
Francisco (grupo 6) – Tem 8 fósforos.
Prof. – Concordam? Todos os grupos têm "8 fósforos" como resposta?
Vários alunos – Sim.
Prof. – E como calcularam o número de fósforos da 4.ª Figura?
Leonor (grupo 10) – Contei o número de fósforos.
Prof. – Contaste o número de fósforos? De que figura contaste?
Leonor – Da figura que desenhámos... Da figura seguinte da sequência. Contámos 8 fósforos.
Prof. – Todos os grupos contaram o número de fósforos da figura que desenharam?
Vários alunos – Sim.

Apenas o grupo 11 utilizou a estratégia aditiva (figura 11), registando que de uma figura para a seguinte, adiciona 1, chegando à 4.ª figura a partir da 1.ª. Pedro (grupo 11) refere que: “Vimos que a figura 1 tem 5 fósforos, a figura 2 tem 6 fósforos, a figura 3 tem 7 fósforos e a figura 4 tem 8 fósforos,... de figura para figura aumenta sempre um fósforo”.


Figura 11 – Estratégia aditiva, Grupo 11, Tarefa 1, Questão 1.2.

Na questão 1.3. é pedido que os alunos completem a tabela apresentada. A estratégia decomposição dos termos foi utilizada unicamente pelo grupo 1, como se mostra na figura 12.



| Número da figura | Número de fósforos |
|---|---|
| 1 | 5 |
| 2 | 6 |
| 3 | 7 |
| 4 | 8 |
| 5 | 9 |
| 7 +4 | 11 |

Figura 12 – Estratégia decomposição dos termos, Grupo 1, Tarefa 1, Questão 1.3.

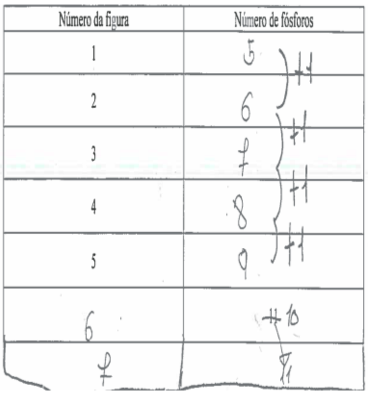
Outros grupos foram desafiados a partilhar a estratégia utilizada. O grupo 7 indicou que a figura 6 teria 11 fósforos, registando esse valor na tabela. Igual resposta foi dada pelo grupo 6, com a seguinte justificação “Não vimos que estava 11 fósforos, fizemos os números todos seguidos no número da figura. É a figura 7 que tem 11 fósforos e não a figura 6, tá mal como fizemos” (Francisco, grupo 6).

Quando chamados a participar na discussão, Rhianna (grupo 7) estabelece o seguinte diálogo:

> Prof. – Alexandre e Rhianna, indicaram que a figura 5 tem 10 fósforos, a figura 6 tem 11 fósforos... Expliquem como pensaram, por favor.
> Rhianna (grupo 7) - Então, de 4 em 4 figuras, acrescenta-se um fósforo e depois acrescenta-se 2 fósforos. A figura 4 tem 8 fósforos, a figura 5 já tem 10 fósforos.

Prof. – Rhianna, vem ao quadro desenhar a figura 4 e a figura 5 por favor.
[Rhianna, desenha as figuras no quadro]
Prof. – O que se mantém em cada figura e o que se altera?
Rhianna. – Mantém 4 fósforos da pá... Aumenta um fósforo aqui [apontando para o fósforo da 5.ª figura].
Prof. – Quantos fósforos tem 4.ª figura? E a 5.ª?
Rhianna – A figura 4 tem 8 e a figura 5 tem 9.
Prof. – Quantos fósforos terá a figura 6? Queres desenhar? Ou não é necessário? Podes ver na tabela.
Rhianna – A figura 4 tem 8, a figura 5 tem 9, a figura 6 tem 10... A figura aumenta 1 e os fósforos também aumenta 1...
Prof. – A tabela pede para indicar figura que tem 11 fósforos.
Rhianna – Será a figura 7...

Os alunos do grupo 13 efetuaram alterações estruturais na tabela (Figura 13).Segundo eles, tal alteração permite organizar o trabalho, pois “o número da figura passava do 5 para o 7” (Diogo, grupo 13), justificando que “Pensámos que a tabela estava mal, vimos que estava a faltar a figura 6, riscámos o 11 (número de fósforos da figura 7) e escrevemos o número 6. Fizemos uma linha por baixo para o 11” (Beatriz, grupo 13). O trabalho realizado por alguns grupos revela que a organização e sistematização dos dados na tabela e o recurso à mesma, pode eventualmente promover a utilização da estratégia aditiva.



| Número da figura | Número de fósforos | |
|---|---|---|
| 1 | 5 | +1 |
| 2 | 6 | +1 |
| 3 | 7 | +1 |
| 4 | 8 | +1 |
| 5 | 9 | |
| 6 | ~~11~~ 10 | |
| 7 | 11 | |

Figura 13 – Estratégia aditiva, Grupo 13, Tarefa 1, Questão 1.3.

No momento de discussão coletivas, Giovanna (grupo8) evidenciou interpretar adequadamente a informação da tabela proposta:

Giovanna (grupo 8) – Professor, posso fazer a tabela no quadro?
Prof. – Sim, podes...
[Giovanna, desenha a tabela no quadro e preenche-a]

Prof. – Giovanna, o que tens a dizer sobre a tabela que preencheste?
Giovanna – Na sequência podemos reparar que vai aumentando cada vez mais um fósforo, o que podemos saber os resultados, e que quando chega aos 11, não é 6 porque será 10 e será sim 7. Isto foi para ver se estávamos atentos!

**Termos distantes**

Na questão 1.4., os alunos têm de indicar o número de fósforos de uma figura distante, neste caso, a 11.ª figura. Durante o trabalho autónomo, verifiquei que grande parte dos grupos recorreu à estratégia aditiva para responder à questão. Oito grupos, recorreram aos dados da tabela proposta na questão 1.3., continuando o seu preenchimento, fator que poderá eventualmente ter condicionado a estratégia de resolução da questão 1.4. Este aspeto está evidente na estratégia de resolução apresentada pelo grupo 1 (figura 14). O grupo utilizou a mesma resolução para responder à questão 1.5.

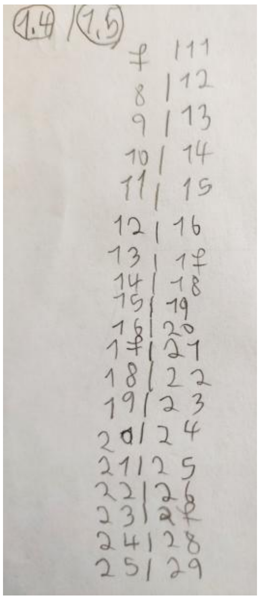



Figura 14 – Estratégia aditiva, Grupo 1, Tarefa 1, Questão 1.4. e 1.5.

Convidada a participar na discussão em grupo, Leonor (grupo 10) refere que o seu grupo continuou o preenchimento da tabela, reforçando que o mesmo pode facilitar na resolução das questões propostas.

[Leonor (grupo 10) escreve a sequência no quadro a partir da 7.ª figura]
Prof. – Leonor, queres explicar aos teus colegas o que fizeste?
Leonor – Eu vi que o número da figura anterior acabava em 7 e que o número de fósforos era 11... e eu continuei a sequência.
Prof. – Leonor, a tabela ajudou-vos a responder a esta questão?
Leonor – Sim, continuámos a tabela, é mais fácil.

O grupo 5, apesar de não ter continuado a tabela, utilizou também a estratégia aditiva (figura 15), continuando o registo dos termos até à ordem solicitada:

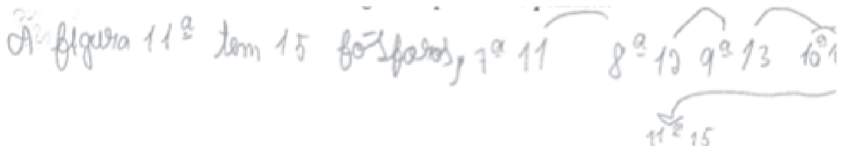

A figura 11ª tem 15 fósforos, 7ª 11 8ª 12 9ª 13 10ª1
11ª 15

Figura 15 – Estratégia aditiva, Grupo 5, Tarefa 1, Questão 1.4.

Durante o momento de trabalho autónomo verifiquei que quatro grupos utilizaram a estratégia decomposição dos termos, como se exemplifica nas figuras 16 e 17. Estes alunos reconhecem que há um conjunto de quatro fósforos constante que se adiciona ao número da figura que é pretendida.


15 porque 4 + 11 fósforos = 15 fósforos.

Figura 16 – Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2, Tarefa 1, Questão 1.4.

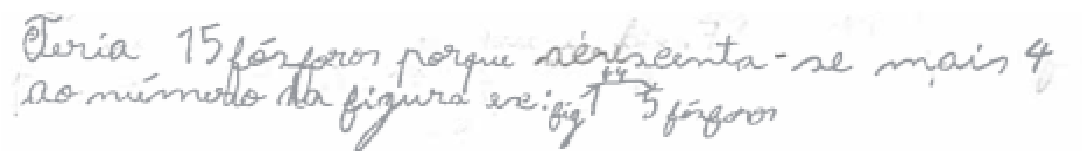

Teria 15 fósforos porque acrescenta-se mais 4 ao número da figura ex: fig. 1 +4 5 fósforos

Figura 17 – Estratégia decomposição dos termos, Grupo 12, Tarefa 1, Questão 1.4.

Na discussão em grupo, Joana identifica os termos e respetiva decomposição ("pá" e "cabo"). Nesta estrutura matemática de termo geral ($n$+$b$) emerge na discussão o valor constante de $b$, que é 4, e o valor da variável natural $n$.

Joana – Nós escrevemos que a figura 11 tem 15 fósforos porque a "pá" tem 4 quadrados e o cabo tem 11 fósforos e 11+4 dá 15.
Prof. – Qual o elemento que mantém sempre o mesmo número de fósforos ao longo da sequência?
Vários alunos – A pá.
Prof. – Quantos fósforos mantém?

Vários alunos – 4.
Prof. – Então, o que aumenta ao longo da sequência?
Vários alunos – O “cabo”, o número de fósforos do “cabo”.
Prof. – Quantos fósforos aumenta de figura para figura?
Vários alunos – 1.
Prof. – Rafael e Rui, como resolveram esta questão?
Rafael (grupo 12) – A figura 11 teria 15 fósforos porque acrescenta-se mais 4 ao número da figura.
Prof. – É sempre assim? Em qualquer figura?
Rafael – Sim, acho que sim...

O grupo 4 utilizou a estratégia objeto inteiro (figura 18) e também foi convidado a participar na discussão coletiva. O grupo 4 identificou que a figura 5 tem 9 fósforos e que duplicando o número da figura também duplica o número de fósforos. Contudo, essa estratégia não conduz a uma resposta correta por não se tratar de uma situação de proporcionalidade e não ter sido feito o necessário ajuste. Apesar da resposta dada estar correta a justificação não está e a discussão coletiva permitiu que verificassem para um termo próximo que a estratégia não conduz a uma resposta correta nesta situação.

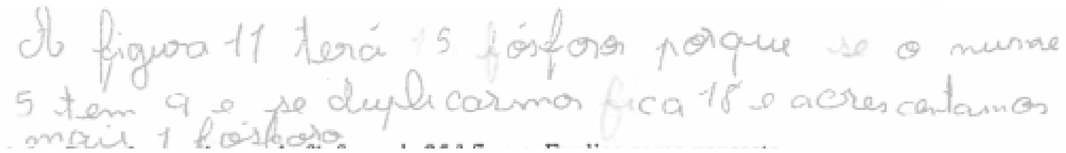

A figura 11 terá 15 fósforos porque se o numero 5 tem 9 e se duplicarmos fica 18 e acrescentamos mais 1 fósforo.

Figura 18 – Estratégia objeto inteiro, Grupo 4, Tarefa 1, Questão 1.4.

Prof. – Mariana e Bruno, como é que resolveram esta questão? Reparei que tinham 19 fósforos, depois apagaram o 19 e escreveram 15... Querem explicar o vosso raciocínio? Porque apagaram o 19?
Mariana (grupo 4) – Reparámos que todos estavam a dizer que dava 15...
Prof. – Certo... Então expliquem como vos deu 19 fósforos, que era o valor inicial e que apagaram.
Mariana – Se o número [da figura] 5 tem 9 [fósforos] e se duplicarmos fica 18 e acrescentamos mais um fósforo.
Prof. – Consegues explicar melhor?
Mariana – O dobro de 5 é 10 e o dobro de 9 é 18, então acrescentamos 1 ao 10, dá 11 e acrescentamos 1 ao 18, dá 19 (fósforos).
Prof. – O dobro de qualquer figura também duplica o número de fósforos?
Mariana – Sim.
Prof. – Mariana, tenta fazer esse raciocínio com a figura 2. A figura 2 tem quantos fósforos?
Mariana – 6

Prof. – Então, qual é a figura cujo produto é dobro de 2?
Mariana – Figura 4.
Prof. – Se a figura 2 tem 6 fósforos, a figura 4 terá...
Mariana – 12.
Prof. – Mas construíram a figura 4. Quantos fósforos tem a figura 4?
Mariana – ... 8 fósforos.
Prof. – Duplicando então o número da figura, obtemos o dobro dos fósforos? Foi válido para a figura 2?
Vários alunos (incluindo a Mariana) – Não...

Na questão 1.5. os alunos têm de indicar o número de fósforos de uma figura distante, neste caso, a 25.ª figura. Dos 13 grupos, oito utilizaram a estratégia aditiva para responder à questão. Desses oito, sete recorreram novamente à elaboração de estruturas e representações simbólicas muito idênticas às da tabela, continuando o seu preenchimento até à figura solicitada, aspeto que, uma vez mais, poderá ter condicionado a estratégia de resolução da questão 1.5.

Convidada a participar na discussão, Giovanna (grupo 8) refere que “Completámos a sequência até à 20.ª figura que tem 24 fósforos. Depois somámos 5 à figura e 5 ao número de fósforos que dá 29 fósforos”. Por seu lado, Martim (grupo 10), explica que o seu grupo “também fizemos parecido, mas passámos da 11.ª figura para a 15.ª figura, depois para a 20.ª e depois para a 25.ª”, como se verifica na figura 19. Estes grupos usaram estratégia aditiva mas não representaram todos os termos, fazendo incrementos no número da figura e de igual modo no número de fósforos das figuras. Estes incrementos são possíveis pois, como já foi referido, nesta estrutura matemática de termo geral (*n*+*b*), o coeficiente da variável, número da figura, *n*, é 1.

Figura 19 – Estratégia aditiva, Grupo 10, Tarefa 1, Questão 1.5.

Três grupo utilizaram a estratégia decomposição dos termos para responder à questão, como mostra a figura 20.


1.5. - Descobre o número de fósforos da 25.ª figura. Explica como pensaste.
29 porque 4 + 25 fósforos = 29 fósforos.

Figura 20 – Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2, Tarefa 1, Questão 1.5.

Na discussão coletiva, Beatriz (grupo 6), evidenciou também a utilização da estratégia decomposição dos termos, reconhecendo o número da figura como variável:

> Beatriz (grupo 6) – Nós fizemos 25+4 que ia dar 29...
> Prof. – Queres explicar melhor? De onde vem o 25? E o 4?
> Beatriz – Em vez de fazer a tabela contamos de cabeça... 25 é o número da figura.
> Prof. – E o 4? O que significa? Porque o somaram?
> Beatriz – A pá tem sempre 4 fósforos e 25 mais 4 dá 29.
> Prof. – Estás a dizer que o número de fósforos do cabo indica o...
> Vários alunos – Número da figura, é o número da figura...
> João (grupo 2) – O número de fósforos do cabo representa o número da figura e depois acrescenta-se sempre mais 4 que é a pá...

**Inverter o raciocínio**

Na questão 1.6., os alunos tiveram de inverter o raciocínio. É importante que distingam que se trata de uma situação diferente da resolvida anteriormente, visto que o número 25 representa agora o número total de fósforos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de fósforos.

Todos os grupos responderam corretamente à questão, sendo que nove recorreram à estratégia aditiva como refere Flor (grupo 5): "Nós tínhamos feito a sequência e depois fomos encontrar o número da figura que tinha 25 fósforos" (figura 21).

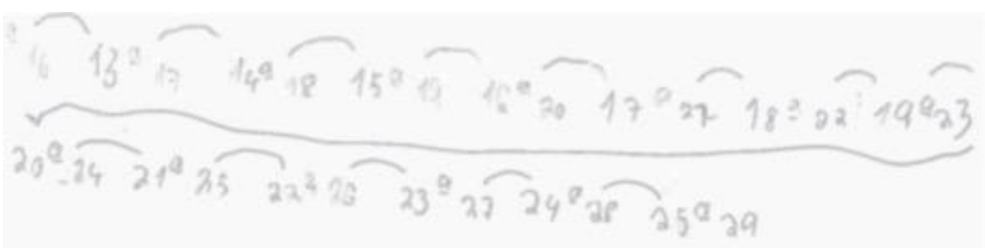
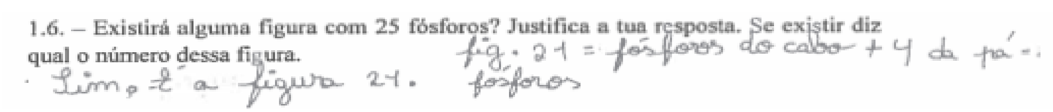



Figura 21 – Estratégia aditiva, Grupo 5, Tarefa 1, Questão 1.6.

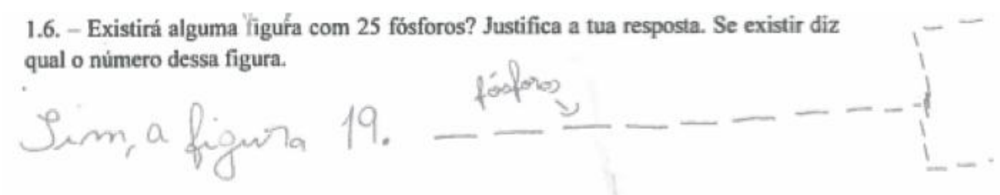
Dois grupos recorreram à estratégia de decomposição dos termos. Rafael (grupo 12) explica que: “Vimos a figura que tinha 29... Subtraímos 4 ao 25 para 21 e subtraímos 4 ao 29 que ficou 25”. O esquema feito pelo grupo 2 evidencia a estratégia decomposição dos termos (figura 22), assim como a justificação dada pelo João (grupo 2) “O número de fósforos do cabo é igual ao número da figura, por isso a figura 21 é igual ao número de fósforos do cabo, mais 4 da pá dá o número de fósforos da figura [25]”. As respostas dadas sugerem que ambos os grupos identificaram a relação entre o número da figura e o número de fósforos, reconhecendo que neste caso estes se relacionam através do valor de *b*.


1.6. – Existirá alguma figura com 25 fósforos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

Sim, é a figura 21. fig. 21 = fósforos do cabo + 4 da pá.
fósforos

Figura 22 – Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2, Tarefa 1, Questão 1.6.

O grupo 7 foi o único que recorreu à estratégia de representação e contagem. Atendendo à representação icónica (figura 23), verifica-se que este grupo não reconheceu que o valor de *ba*se mantém constante ao longo da sequência pictórica, colocando na “pá” um número de fósforos diferente de quatro.


1.6. – Existirá alguma figura com 25 fósforos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

Sim, a figura 19.
fósforos

Figura 23 – Estratégia representação e contagem, Grupo 7, Tarefa 1, Questão 1.6.

As estratégias utilizadas para responder às diversas questões da tarefa foram, essencialmente, as estratégias de representação e contagem e aditiva. A estratégia de decomposição dos termos foi pontualmente utilizada nas questões relacionadas com os termos distantes e inversão do raciocínio.

Nas questões 1.1. e 1.2., com a exceção de um grupo, todos os outros utilizaram a estratégia de representação e contagem. Na maioria das respostas dadas sugere que os alunos, relativamente à questão 1.2., limitaram-se a contar o número de fósforos que compõem a figura pedida. Na questão 1.3., doze grupos usaram a estratégia aditiva para completar a tabela. Relativamente às questões 1.4. e 1.5., em que é solicitado o número de fósforos de um termo distante (11.º e 25.º termos), oito grupos utilizaram a estratégia aditiva, optando por completar a tabela até ao termo pedido. Quatro grupos utilizaram a estratégia de decomposição dos termos para responder à questão 1.4. e três grupos utilizaram a mesma estratégia para responder à questão 1.5. Realço o facto de serem os mesmos grupos a utilizar esta estratégia nas questões anteriormente referidas. Relativamente à questão 1.6., cujo objetivo era explorar a inversão do raciocínio, sete grupos utilizaram a estratégia aditiva, completando a tabela no sentido de verificar se existe algum termo composto por 25 fósforos. O grupo 7 utilizou a estratégia de representação e contagem, desenhando a figura, o que conduz a uma resposta errada, e os grupos 2 e 12 utilizaram a estratégia de decomposição dos termos.

### 5.1.3. Generalizações apresentadas pelos alunos

Na questão 1.7. é pedido que os alunos indiquem como podem saber o número de fósforos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número. Os alunos podiam ter seguido um pensamento aritmético, indicando que, de uma figura para a seguinte, adicionam um fósforo ou seguir um pensamento de cunho algébrico em que expressam uma relação direta entre o número da figura e o número de fósforos, podendo usar diferentes representações. A maioria dos grupos utilizou a estratégia aditiva e quatro grupos utilizaram a estratégia de decomposição dos termos.

Todos os grupos recorreram à linguagem verbal para responder corretamente a esta questão. Desde o início da discussão que os vários grupos identificaram nas diferentes figuras da sequência pictórica, elementos e estruturas que facilitaram a comunicação e a expressão oral e escrita. Ao longo da sequência, reconheceram a existência da "pá" e do "cabo". Vários grupos referiram que o número de fósforos que formam a "pá" se mantem sempre constante, variando o número de fósforos do "cabo".

Das treze respostas dadas, apenas três são generalizações algébricas de natureza contextual (figura 24, figura 25 e figura 26) e cuja estratégia de resolução utilizada é a de decomposição dos termos. Todos os grupos identificaram o objeto generalizado e para uma ordem qualquer referem “o número da figura”. Rafael (grupo 12), iniciou a discussão em grande grupo explicando que “o número da figura mais 4 dá o número de fósforos. Respondemos que a regra é: “o número de fósforos é sempre mais 4 que o número da figura”.

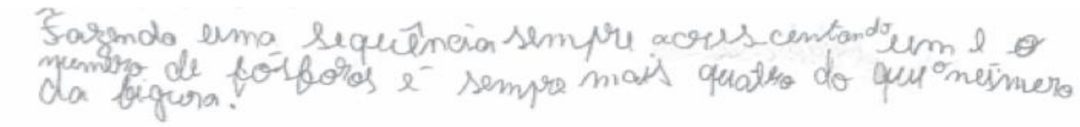

Fazendo uma sequência sempre acrescentando um 1 o número de fósforos é sempre mais quatro do que o número da figura!

Figura 24 – Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 5, Tarefa 1, Questão 1.7.

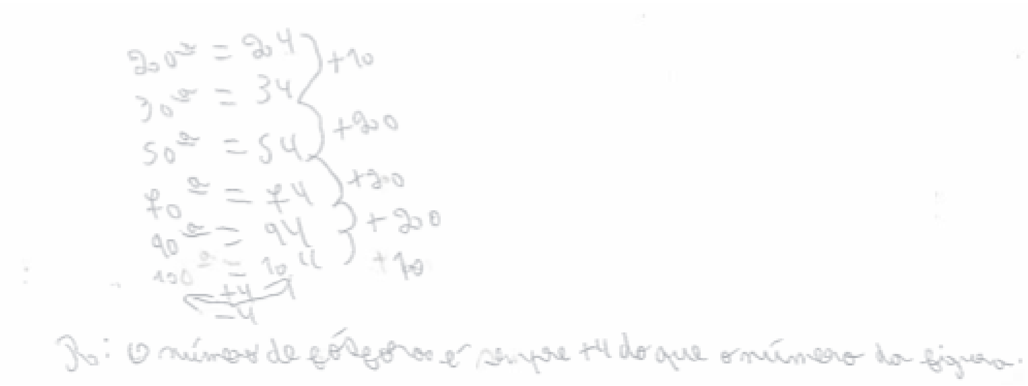

R: O número de fósforos é sempre +4 do que o número da figura.

Figura 25 – Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 10, Tarefa 1, Questão 1.7.

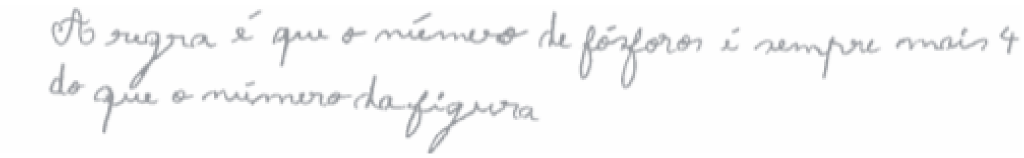

A regra é que o número de fósforos é sempre mais 4 do que o número da figura

Figura 26 – Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 12, Tarefa 1, Questão 1.7.

Dois grupos também recorreram à linguagem verbal para expressar o seu raciocínio, contudo, a nível semântico, não se verificou uma relação explícita entre o número da figura (ordem do termo) e o número de fósforos dessa figura (o termo da sequência numérica), tendo evidenciado uma generalização algébrica contextual.

Dois grupos apresentaram uma generalização algébrica factual. O grupo 9 referiu-se a termos de ordens distantes mas atribui um valor à ordem (figura 27), o que sugere uma generalização algébrica factual. Da discussão surge a explicação de Gonçalo (grupo 1): “A regra é mais 4”, dando também um exemplo com o termo 200.

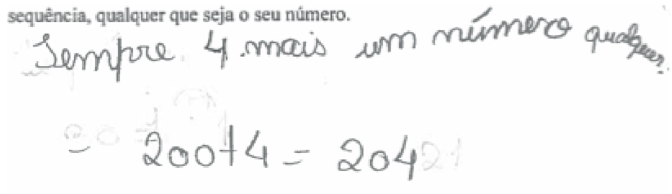



Figura 27 – Generalização algébrica factual, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 9, Tarefa 1, Questão 1.7.

Cinco grupos, apresentaram uma generalização aritmética e estratégia aditiva (figura 28 e figura 29) para responder a esta questão. O grupo 3 identificou que de termo para termo aumenta um fósforo e o grupo 8 não representou todos os termos da sequência, fez incremento no número da figura e igual incremento no número de fósforos, pelo coeficiente da variável independente ser um.


Figura 28 – Generalização aritmética, Estratégia aditiva, Grupo 3, Tarefa 1, Questão 1.7.


Figura 29 – Generalização aritmética, Estratégia aditiva, Grupo 8, Tarefa 1, Questão 1.7.

Da discussão surge o desafio de descobrirem uma regra que permita saber o número da figura, qualquer que seja o número de fósforos dado:

> Prof. – Rafael, e se tivermos o número de fósforos, como determinamos o número da figura?
> Rafael – Tiramos 4.
> Vários alunos – Subtraímos a pá...
> Prof. – Portanto...
> [O professor escreve o seguinte no quadro e solicita que os diversos grupos completem oralmente as igualdades]:
> [Número da figura + ______________= ____________________; Número de fósforos - ____________= ______________________]

> Prof. – João e Iara, conseguem completar a primeira expressão?”
> João (grupo 2) – Sim, o número da figura mais 4 dá o número de fósforos.
> Prof. – Diz isso de uma forma mais correta. Utiliza os símbolos da expressão.
> ...
> João – Número da figura mais 4 é igual ao número de fósforos.
> ...
> Prof. – Francisco e Beatriz, conseguem completar a segunda expressão?
> Beatriz (grupo 6) – Sim, é fácil. Número de fósforos menos 4 é igual ao número da figura.
> Prof. – Estas expressões podem substituir as frases escritas por muitos grupos. Utilizamos alguns símbolos matemáticos de forma a simplificar o raciocínio. Faz sentido? Estou-me a fazer entender?
> Vários alunos – Sim...
> Prof. – Então, quantos fósforos tem a figura 200?.
> Vários alunos – 204.
> Prof. – Muitos grupos completaram a sequência. Já viram o trabalho que teriam para completar a sequência até à figura 200? Através da expressão, conseguimos facilmente organizar o nosso raciocínio e determinar o número de fósforos de qualquer....
> Vários alunos – ... Figura...

Dando continuidade à discussão, coloco mais algumas questões sobre alguns termos, inclusive de situações de inversão do raciocínio:

> Prof. – E uma figura com 1000 fósforos. Qual o número dessa figura? Salvador, consegues responder?
> Salvador (grupo 9) – Novecentos e noventa e ...
> Vários alunos – Novecentos e noventa e...
> Salvador – 998.
> Prof. – Tens a certeza? Que cálculo efetuaste?
> Salvador – 1000-4.

### 5.1.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos

Relativamente às questões 1.1. e 1.2. os alunos não apresentaram quaisquer dificuldades na resolução das mesmas. Alguns grupos evidenciaram um maior rigor no desenho da figura, aspeto que pode influenciar a resposta à questão 1.2., pois uma representação icónica inexata pode comprometer a contagem dos fósforos. As dificuldades evidenciadas na questão 1.3., podem estar relacionadas com a análise, pois as respostas incorretas sugerem que os alunos não prestaram devida atenção aos dados das variáveis da tabela, continuando-a de uma mecanizada. Todos os grupos responderam corretamente à questão 1.4. Quatro grupos utilizaram corretamente a estratégia de decomposição dos termos, identificando a estrutura que se mantém e o que se altera ao longo da sequência. O grupo 4 utilizou a estratégia de objeto inteiro, que aqui conduz a uma resposta errada. Os alunos que constituem este grupo reconheceram que a figura 5 é constituída por nove fósforos, contudo, para este grupo, erradamente, duplicando o número da figura, também duplica o número de fósforos. Os diversos grupos não manifestaram dificuldades significativas na resolução da questão 1.5. Mais uma vez ficou evidente que a maioria dos grupos recorreu ao preenchimento da tabela para determinar o número de fósforos de uma figura distante. A utilização recorrente desta estratégia pode sugerir uma maior segurança e confiabilidade relativamente às respostas dadas por parte dos alunos. Relativamente à questão 1.6., durante o trabalho autónomo, alguns grupos manifestaram dificuldade em reconhecer de que se trata de uma situação diferente das exploradas anteriormente, pois nesta situação, o número 25 representa agora o número total de fósforos. Mais uma vez, para responder a esta questão, a maioria dos grupos recorreu à informação contida nas diversas representações com estruturas bastante similares às tabelas exploradas nas questões anteriores. Os alunos manifestaram dificuldades em verificar a existência de um termo que contém determinado número de objetos. Também na questão 1.7., durante o trabalho autónomo, vários grupos manifestam dificuldade em perceber o que é pedido, facto que se manifestou nas produções escritas, em que os grupos nem sempre respondem ao solicitado. Na questão 1.7., a expressão "...qualquer que seja o seu número.", revelou-se para alguns alunos abstrata e subjetiva, impedindo que respondessem,

### 5.1.5. Reflexão

Todos os grupos envolveram-se ativamente na exploração da tarefa, os elementos de cada grupo cooperaram entre si, respeitando as regras inicialmente discutidas e propostas. A discussão oral em grande grupo assumiu um papel preponderante na apresentação e troca de estratégias e na manifestação de dificuldades evidentes, nomeadamente no que se refere às estratégias, natureza da generalização, na argumentação e justificação. Nos momentos de discussão foi importante que todos os alunos entendessem as estratégias e natureza de generalização apresentadas pelos colegas.

Todos os grupos utilizaram os fósforos como suporte para representar a figura solicitada na questão 1.1. Contudo, verifico que até à questão 1.4., dez grupos utilizam insistentemente os fósforos para representar as diversas figuras, de forma a ajudar e validar as respetivas respostas. Estes dez grupos realçaram não possuir o número de fósforos necessário para responder à questão 1.5. Através de representações ativas e icónicas, todos os grupos responderam facilmente às questões iniciais da tarefa, optando assim por uma estratégia de representação e contagem.

Realço a existência de representações icónicas feitas com um elevado rigor, aspeto importante quando os alunos recorrem à estratégia de representação e contagem, pois permite uma fácil e correta contagem dos fósforos A tabela apresentada na questão 1.3. é usada pelos alunos como representação simbólica para organizar e apresentar os dados, permitindo-lhes identificar e compreender a regularidade presente com mais facilidade. Verifico que a maioria dos grupos opta por completar a tabela até ao termo que lhe permita obter os dados necessários para responder às questões seguintes. Outros grupos optam por desenhar os termos da sequência, usando uma representação icónica.

Verifico que linguagem natural está muito presente ao longo da tarefa. É usada frequentemente pelos alunos para justificar e evidenciar os seus raciocínios e estratégias. Também verifico a existência da representação simbólica quando os alunos recorrem a expressões numéricas.

Apesar da maioria dos grupos ter usado a estratégia aditiva na resolução das tarefas, os grupos 2 e 12 utilizaram frequentemente, ao longo da tarefa, a estratégia de decomposição dos termos, aspeto que sugere um processo de generalização, facto visível durante a observação do trabalho em grupo, na apresentação e discussão coletiva. Cinco grupos expressaram a utilização de uma generalização de natureza aritmética, dois grupos uma generalização algébrica fatual e cinco grupos uma generalização de natureza algébrica contextual. Os alunos manifestaram facilidade na representação e análise da sequência pictórica crescente, verificando o que é comum entre um termo e o seguinte, acrescentando um fósforo à figura anterior. A tabela T2, em anexo, sistematiza as estratégias e generalizações utilizadas na tarefa 1 do estudo.

## 5.2. Sequência em "S" (Tarefa 2)

### 5.2.1. Características da tarefa

Nesta tarefa a sequência apresentada também é crescente. Cada figura recorre a arranjos visuais identificáveis com a letra "S" do alfabeto (Figura 30. Esta sequência pictórica crescente tem a mesma lei de formação da tarefa anterior. Contudo, diverge bastante no que se relaciona com os referidos arranjos visuais. Foram apresentados 3 termos de uma sequência pictórica que são formados por pentágonos e cuja respetiva constituição depende da sua ordem. Os termos apresentados não são consecutivos, sendo dados os de ordem 1, 3 e 4.Todos os termos pictóricos têm uma parte que se mantém constante, formada por quatro pentágonos e uma parte, central, que varia em função da ordem. Nesta tarefa, não foram disponibilizados quaisquer materiais manipuláveis, o que inviabiliza as representações ativas.

No início da aula distribuo o enunciado da tarefa por cada aluno, lendo-o de seguida no sentido de esclarecer e dissipar eventuais dúvidas. Após a leitura e esclarecimento das dúvidas, sem que tal responde às questões ou aponte estratégias de resolução, inicia-se o trabalho em pequenos grupos.

A sequência apresentada aos alunos nesta tarefa é a seguinte:

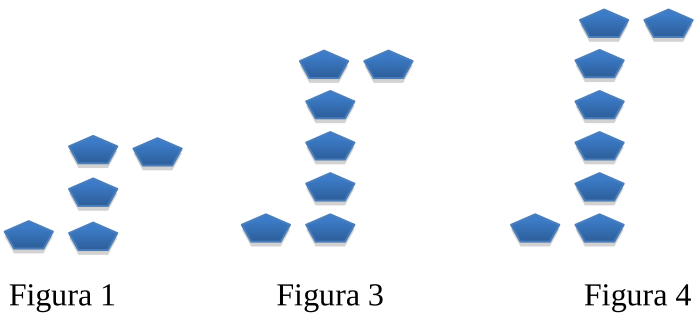



Figura 30. Sequência pictórica,Tarefa 2.

### 5.2.2. Estratégias utilizadas pelos alunos

**Termos próximos**

Os diversos grupos não manifestaram dificuldade em resolver esta questão, tendo todos os grupos representado corretamente a figura 2 da sequência. Durante a resolução, as divergências que iam surgindoprendiam-se com o rigor e qualidade da representação icónica. A maioria dos grupos (3, 5, 6, 7, 8, 10 e 13) sistematizaram a informação recolhida da sequência em “S” através de símbolos matemáticos e desenhos. Esses alunos consideraram estes registos importantes e facilitadores na resolução das questões seguintes. Três grupos começaram por contar o número de pentágonos dos termos dados, identificando a lei de formação, como exemplificam os registos do grupo 10 (Figura 31).

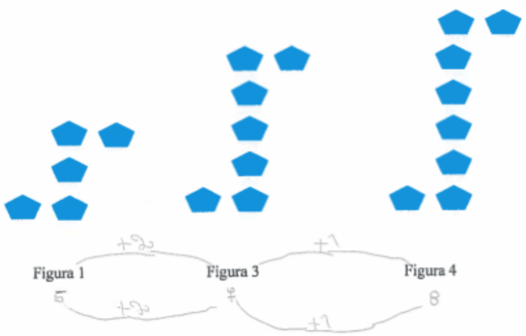



Figura 31. Registo da lei de formação, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.1.

Seis grupos utilizaram a estratégia de decomposição dos termos, referindo que reconheceram que a lei de formação da sequência da tarefa 2 é igual à da tarefa 1, facto que facilitou as respostas às questões propostas nesta tarefa. Durante a discussão e como forma de facilitar a comunicação e a organização das ideias, alguns grupos identificaram nas diversas figuras da sequência, elementos que ajudaram a sistematizar o raciocínio. Identificaram uma “base”, uma “cabeça” e um “tronco”. Verificaram que ao longo da sequência, os elementos “base” e “cabeça”, cada um constituído por dois pentágonos, permanecem constantes, variando exclusivamente o número de pentágonos do “tronco”. Os grupos identificaram que a figura 1 tem um pentágono no “tronco”, a figura 3 tem três pentágonos no “tronco” e a figura 4 tem quatro pentágonos no “tronco”. Por exemplo, o grupo 8 identificou que ao longo da sequência, há partes dos termos que se mantêm constante e outras partes que variam. Assinalou nos termos representados os dois pares de pentágonos que constituem a “base e  topo” das figuras, que se mantêm constantes (Figura 32).

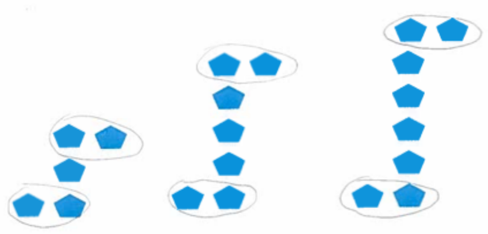


Figura 32. Identificação das partes constituintes nos termos, Grupo 8, Tarefa 2, Questão 2.1.

Esta relação é também verificada pelo grupo 12, como expressa Rafael: “Têm diferente o número de pentágonos do tronco e têm igual o número de pentágonos da base e da cabeça”.

Por sua vezes, osgrupos 10 e 13, para além do desenho da figura 2, indicaram também  o número de pentágonos dessa figura, o que sugere a utilização da estratégia de representação e contagem.

No momento de discussão coletiva, o grupo 13 revelou também ter identificado o que varia entre figuras consecutivas, e a partir do questionamento vários alunos relacionaram esse valor com a ordem do termo na sequência:

> Prof. – Diana, o que verificaste quando passámos da figura 1 para a figura 3?
> Diana – Acrescentámos mais um pentágono ao tronco do S.
> Prof. – Mas quando passamos da figura 1 para a figura 3, verificamos isso?
> Maria – Acrescentámos mais dois pentágonos.
> Diana – Sim, da figura 1 para a figura 2 acrescentei um pentágono.
> ...
> [Diana desenha a figura 2 no quadro.]
> Diana – A figura 2 tem dois pentágonos no tronco, a figura 3 tem três pentágonos no tronco, a figura 4 tem quatro pentágonos no tronco,...
> Prof. – Quantos pentágonos terá a figura 100 no “tronco”?
> Vários alunos – 100.
> Prof. – E o que se mantém constante?
> Vários alunos – A cabeça e a base.

A componente visual do termo evidencia-se como essencial para a o estabelecimento de relações e para dar sentido ao que se mantém constante e ao que altera em função da ordem da figura na sequência. Apesar disso, vários grupos usaram ainda uma estratégia aditiva que se reflete no modo como preencheram a tabela apresentada na questão 2.3. Nesta questão sete grupos recorreram à estratégia de comparação entre termos consecutivos identificando a alteração que ocorre de um termo para o seguinte, como é exemplo o registo do grupo 6:

| | |
|---|---|
| 1 | 5 +1 |
| 2 | 6 +1 |
| 3 | 7 +1 |
| 4 | 8 +1 |
| 5 | 9 +1 |
| 6 | 10 +1 |

Figura 33. Estratégia aditiva no preenchimento da tabela, Grupo 6, Tarefa 2, Questão 2.3.

Na discussão coletiva também o grupo 3 evidenciou o uso da estratégia aditiva "Contámos os pentágonos das figuras e vimos depois que era sempre mais 1 para saber a figura seguinte" (Joana, Grupo 3).

Por seu lado, seis grupos (grupos 1, 2, 4, 5, 9 e 12) que utilizaram a estratégia decomposição dos termos, relacionado o total de pentágonos de um termo com a sua ordem, tal como regista o grupo 1 (Figura 34):

| | |
|---|---|
| 1 | +4 5 |
| 2 | +4 6 |
| 3 | +4 7 |
| 4 | +4 8 |
| 5 | +4 9 |
| 6 | +4 10 |

Figura 34. Estratégia decomposição dos termos no preenchimento da tabela, Grupo 1, Tarefa 2, Questão 2.3.

De modo a confrontar estratégias diferentes no momento de discussão coletiva, também o grupo 1 foi chamado a partilhar a sua estratégia que tem a intervenção de alunos de diferentes grupos. Pedro, cujo grupo usou uma estratégia aditiva revela não ter ainda identificado corretamente as várias partes de cada termo e o número de pentágonos que as constituem. A discussão na turma ajudou a esclarecer os diferentes grupos:

> Gonçalo (grupo 1) – Nós fizemos diferente. 1 mais 4 dá 5, 2 mais 4 dá 6, 3 mais 4 dá 7,...
> [Gonçalo escreve no quadro – "2+4=6"]
> Prof. – Gonçalo, o que representa o 2? E o 6?
> Gonçalo – 2 é o número da figura e o seis é o número de pentágonos.
> Prof. – Somas sempre 4. O que representa o 4?
> Pedro (grupo 11) – É o tronco.
> Maria (grupo 13) – É o que juntamos ao número da figura.
> Vários alunos – Sim, é o que juntamos ao número da figura.
> João Gil (grupo 2) – É a soma da base e da cabeça.
> Vários alunos – E mantém-se sempre igual...
> Rafael (grupo 12) – Então o número da figura é o tronco.

Emergiu na discussão ainda outro modo de representar simbolicamente o cálculo do número total de pentágonos baseado na decomposição dos termos, apresentado pelo grupo 5, exemplificado para a figura 5 da sequência: 2 + 2 + 2 (o dois do meio respeita ao número da figura) e 2 + 5 + 2, respetivamente. Mariana acrescentou também que "O 2 é o número de pentágonos da base, o 5 é o número de pentágonos do tronco [número da figura] e o 2 é o número de pentágonos da cabeça" (Mariana, Grupo 4).

Na discussão emergiu, logo nas questões iniciais, uma regra geral expressa por João (Grupo 5): "O número de pentágonos é sempre mais 4 que o número da figura".

Francisco salientou outro modo de representar simbolicamente o cálculo do número total de pentágonos (figura 35), baseado também na decomposição dos termos, que explicou: "Nós não dividimos a figura em "base" e "cabeça". Vimos que se acrescenta sempre um pentágono ao tronco "S", mantendo sempre um pentágono em baixo e um em cima" (Francisco, grupo 6). Daqui verifica-se que o "tronco" para este grupo envolve um número de pentágonos igual à soma do número da figura com dois, que se representa pela expressão:1 + 7 + 1.

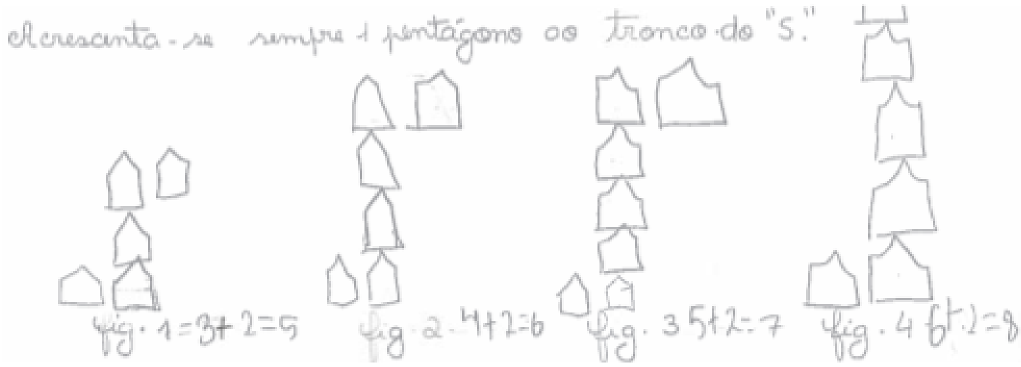



Figura 35. Cálculo para a figura 5, , Grupo 6, Tarefa 2, Questão 2.3.

**Termos distantes**

Na questão 2.4. os alunos indicaram o número de pentágonos de uma figura distante, neste caso, a 15.ª figura da sequência. Todos os 13 grupos responderam corretamente à questão, sendo que oito recorreram à estratégia aditiva e cinco usaram a estratégia de decomposição dos termos. No decorrer do trabalho autónomo, verifiquei que as respostas dadas nesta questão estavam condicionadas pelo raciocínio e representações efetuadas para responder à questão anterior, de preenchimento da tabela. Tal situação é explicitada na resposta do grupo 3 (Figura 36) "Nós continuámos a tabela" (Afonso, Grupo 3).

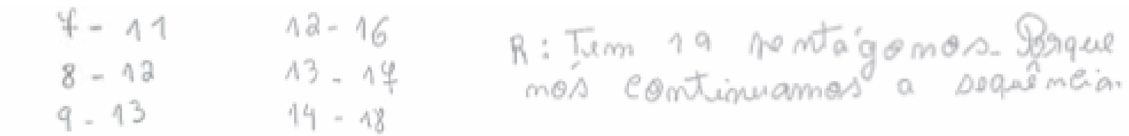



Figura 36. Estratégia aditiva para o 15.º termo, Grupo 3, Tarefa 2, Questão 2.4.

Também o Grupo 8 (figura 37) usou uma estratégia aditiva, mas não representou todos os termos, fazendo antes incrementos no número da figura e de igual modo no número de pentágonos das figuras, como explica Giovanna: "Se da 5.ª figura para a 10.ª aumenta 5, então também aumenta 5 pentágonos [para a 15.ª]. A 5.ª figura tem 9 pentágonos, mais 5 dá 14...". Tal é possível porque de uma figura para a seguinte se adicionou um pentágono, evidenciando a estrutura matemática do termo geral da sequência numérica por o coeficiente de $n$ ser 1 ($n + b$).

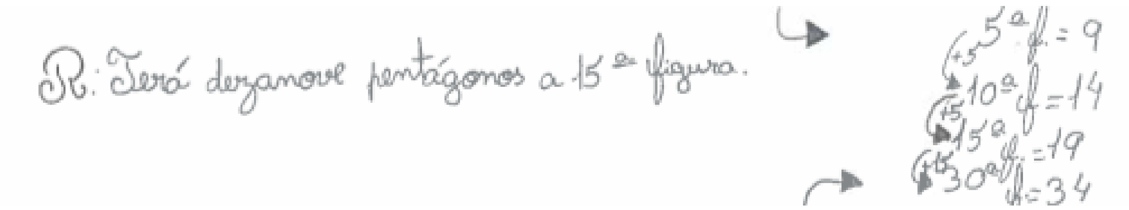



Figura 37. Estratégia aditiva para o 15.º termo, Grupo 8, Tarefa 2, Questão 2.4.

Além do que era solicitado na tarefa, pedi também aos alunos que determinassem a figura 30 da sequência, tendo o Grupo 8 dado continuidade ao seu raciocínio aditivo, da figura 15 para a figura 30, adicionando 15 ao número de pentágonos da figura 15 para obter o número de pentágonos da figura 30.

Da discussão desta estratégia, Rafael (Grupo 12), identificou uma regularidade no algarismo das unidades do número de pentágonos das figuras cuja ordem na sequência é um múltiplo de 5:

> Rafael – Aumenta 9, 4, 9, 4,...
> Prof. – Queres explicar?
> Rafael – Sim, a 5.ª figura é 9, a 10.ª, o algarismo das unidades é 4, a 15.ª figura tem 19 pentágonos, o algarismo das unidades é 9...
> Prof. – A 20.ª figura teria quantos pentágonos? Qual seria o algarismo das unidades?
> Rafael – 24, o 4...

A resposta do Grupo 2 (Figura 38) evidencia a estratégia de decomposição do termo pictórico, considerando a existência da "base", "tronco" e "cabeça" para destacar a relação com o número da figura:


Figura 38. Estratégia de decomposição dos termos para o 15.º termo, Grupo 2, Tarefa 2, Questão 2.4.

Na questão 2.5. os alunos indicaram, mais uma vez, o número de pentágonos de uma figura distante, neste caso, a 30.ª figura. É importante referir que, o número da figura proposta nesta questão, ser o dobro da anterior, pode ter condicionado as estratégias utilizadas, de objeto inteiro, por quatro grupos que responderam incorretamente a esta questão. Tal situação é explicitada na resposta do grupo 3 (figura 39).


Figura 39. Estratégia de objecto inteiro para o 30.º termo, Grupo 3, Tarefa 2, Questão 2.5.

O grupo 7 utilizou a estratégia objeto inteiro e foi desafiado a partilhar a sua estratégia. Alexandre, no momento de discussão coletiva, registou no quadro essa relação de dobro (Figura 40). A justificação de Alexandre é contestada por Rafael que usou a estratégia de decomposição do termo:

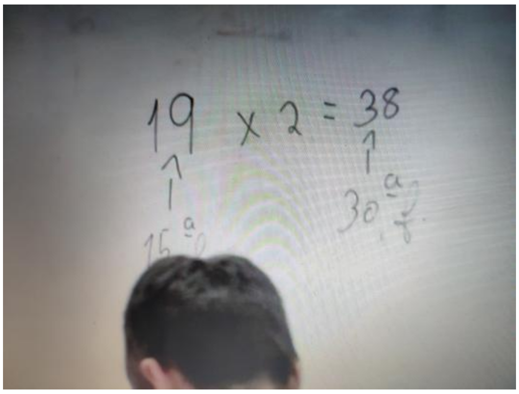



Figura 40. Estratégia de objecto inteiro para o 30.º termo, Grupo 7, Tarefa 2, Questão 2.5.

> Alexandre (grupo 7) – Nós vimos que a 15.ª figura tem 19 pentágonos e vimos que 15 é metade de 30, por isso multiplicámos os pentágonos da 15.ª figura por 2 para dar 38 que é o número da 30.ª figura.
> Rafael (grupo 12) – Não está certo. Ao número da figura acrescenta-se sempre mais 4. Ele multiplicou 19 por 2 e deu 38, mas a 30.ª figura não tem 38 porque tem de se acrescentar mais 4 [ao número da figura].
> Prof. – Atendendo a esta regra proposta pelo grupo do Alexandre, tentem testá-la usando por exemplo a figura 2. Quantos pentágonos tem a figura 2?
> Vários alunos – 6.
> Prof. – Então, segundo esta regra, quantos pentágonos teria a figura 4?
> Vários alunos – 12!
> Prof. – A figura 4 tem 12 pentágonos?

Mais uma vez, no sentido de confrontar diferentes estratégias durante o momento de discussão coletiva, sugeri a Leonor (grupo 10) que partilhasse a estratégia de resolução (estratégia aditiva) utilizada pelo seu grupo (figura 41). Este grupo não representou todos os termos, mas fez incrementos no número da figura e de igual modo no número de pentágonos, o que conduz a uma resposta correta por o coeficiente da variável ser um.


Figura 41. Estratégia aditiva para o 30.º termo, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.5.

Seis grupos utilizaram a estratégia decomposição dos termos. No momento da discussão coletiva, Rui (grupo12) referiu que: “Ao número da figura acrescenta-se sempre mais 4”. Também as resoluções feitas pelos grupo 4 e 5 explicitam a estratégia decomposição dos termos (figura 42 e figura 43).

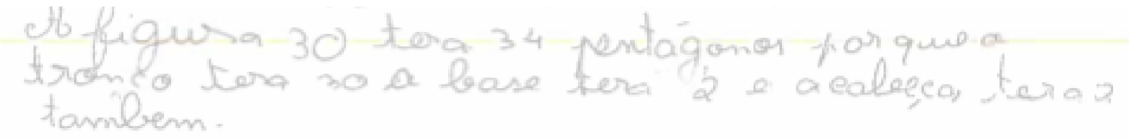



Figura 42. Estratégia decomposição dos termos para o 30.º termo, Grupo 4, Tarefa 2, Questão 2.5.


Figura 43. Estratégia decomposição dos termos para o 30.º termo, Grupo 5, Tarefa 2, Questão 2.5.

**Inverter o raciocínio**

Na questão 2.6., os alunos têm de inverter o raciocínio. O número 24 representa o total de pentágonos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de pentágonos. Quatro grupos utilizaram a estratégia aditiva, oito grupos a estratégia decomposição dos termos e um grupo não respondeu à questão. Da discussão coletiva começou por emergir o uso da estratégia aditiva, em que o grupo 6 apresentou a listagem de termos da sequência até ao 30.º termo (figura 44), feita na questão anterior: “Utilizámos a sequência da questão anterior e vimos que era o 24” (Francisco, Grupo 6).

Figura 44. Estratégia aditiva para o raciocínio inverso, Grupo 6, Tarefa 2, Questão 2.6.

Mariana (grupo 4) referiu que o seu grupo utilizou outra estratégia, escrevendo no quadro uma expressão (figura 45) e evidenciando o uso da estratégia decomposição dos termos para determinar o número da figura.

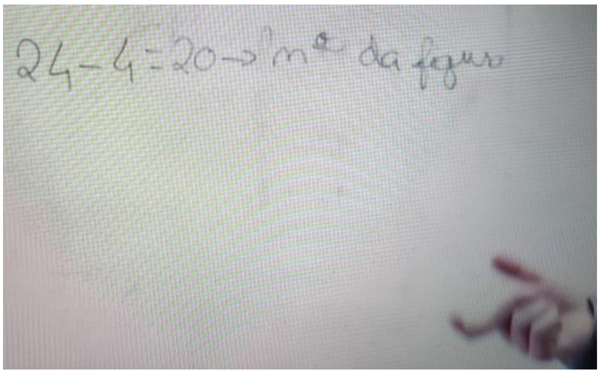



Figura 45. Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio inverso, Grupo 4, Tarefa 2, Questão 2.6.

Prof. – O que representa o 24?
Mariana (grupo 4) – O número de pentágonos.
Prof. – E o 4?
Mariana e vários alunos – A cabeça e a base.
Mariana – Ao número de pentágonos tirámos 4 e ficámos a saber o número da figura.

João (grupo 5) – Nós fizemos mentalmente...
Leonor (grupo 10) – Fizemos um esquema (figura 46). A figura 20 tem 24 pentágonos... também dá para ver que a figura que tem 24 pentágonos é a figura 20. Somamos 4 para saber o número de pentágonos, subtraímos 4 para ficar a saber qual é a figura.


Figura 46. Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio inverso, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.6.

A resposta de Leonor nesta discussão e o registo feito pelo grupo evidenciou a sua capacidade de reverter o raciocínio, estabelecendo uma relação direta entre o número da figura e a sua constituição.

### 5.2.3. Generalizações apresentadas pelos alunos

Na questão 2.7., os alunos tinham de explicar como podiam saber o número de pentágonos de uma figura da sequência, qualquer que fosse o seu número. Nove grupos utilizaram a estratégia decomposição dos termos, três grupos a estratégia aditiva e um grupo não respondeu à questão. Atendendo à categorização das generalizações segundo Radford (2006), dos nove grupos que utilizaram a estratégia decomposição dos termos, quatro apresentaram uma generalização algébrica factual e cinco grupos uma generalização algébrica contextual. Três grupos apresentaram a generalização aritmética e um grupo não respondeu à questão.

Joana (grupo 3), iniciou a discussão coletiva referindo que: “Aumenta sempre mais um pentágono. De figura para figura aumenta sempre mais um”, evidenciando uma estratégia aditiva, cuja generalização apresentada é aritmética.

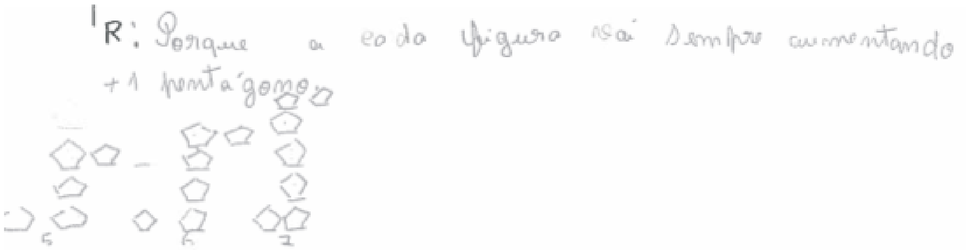



Figura 47. Generalização aritmética, Estratégia aditiva para a generalização, Grupo 3, Tarefa 2, Questão 2.7.

Da discussão surgiu a opinião da Carolina (grupo 9) "É sempre o número da figura mais 4. Escrevemos 5000 que é a figura, mais 4, tem 5004 pentágonos". Este grupo utilizou a estratégia decomposição dos termos, apresentando uma generalização algébrica factual (figura 48).


Figura 48. Generalização algébrica factual, Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 9, Tarefa 2, Questão 2.7.

Martim refere que: "O número de pentágonos é sempre mais 4", como regista o grupo 10 (figura 49), apresentando uma generalização algébrica contextual.


Figura 49. Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dostermos para a generalização, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.7

Na discussão coletiva, Rafael (grupo 12), pediu para explicar aos colegas a estratégia utilizada pelo seu grupo (figura 50). Este grupo evidencia o uso da estratégia decomposição dos termos, apresentando uma generalização algébrica contextual O número da figura mais 4 é igual ao número de pentágonos. Esta regra vale para qualquer figura."

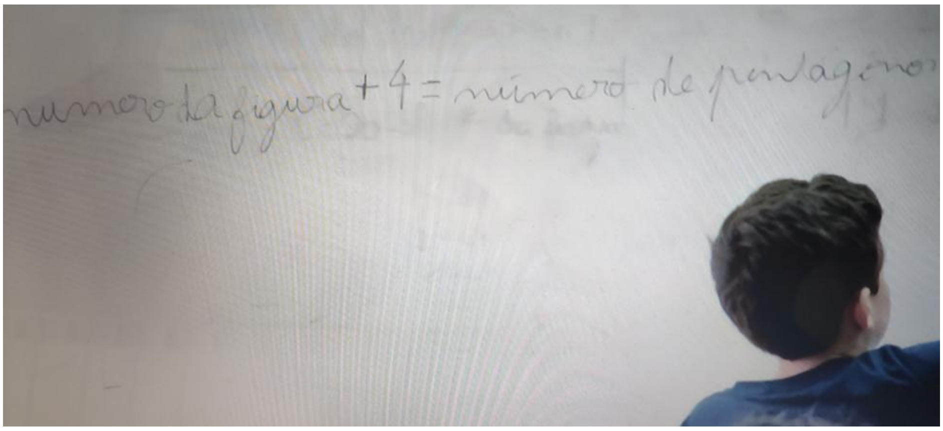



Figura 50. Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 10, Tarefa 2, Questão 2.7

### 5.2.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos

Na questão 2.1., as maiores dificuldades prendem-se com o desenho correto e rigoroso dos pentágonos e respetiva representação icónica. Contudo, tal aspeto não impediu que todos os grupos respondessem corretamente a esta questão, fazendo um esboço do termo da sequência, respeitando elementos da disposição dos hexágonos, na vertical e na horizontal. Na questão 2.4, tanto no momento de trabalho autónomo, como no de discussão coletiva, ficou evidente a dificuldade que alguns alunos sentiram em utilizar uma estratégia diferente da aditiva. Quando convidados a utilizar outra estratégia para resolver esta questão, a maioria dos alunos referiu que para determinar o número de pentágonos de um termo distante, é mais fácil completar a tabela até ao termo solicitado. Na questão 2.5., o termo da figura apresentado é o dobro do da figura anterior, aspeto que pode ter condicionado as estratégias de resolução utilizadas por oito alunos. Estes alunos para determinar o número de pentágonos do 30.º termo, utilizaram erradamente a estratégia "objeto inteiro", justificando que: "se duplicarmos o número da figura, também duplicamos o número de pentágonos". A questão 2.6. volta a evidenciar a dificuldade que alguns alunos tiveram em utilizar outras estratégias diferentes da aditiva, como forma de validar as suas respostas, tendo oito alunos completado a tabela até ao termo solicitado. Na questão 2.7., os alunos, através de palavras, símbolos ou esquemas, eram convidados a explicar como podiam saber o número de pentágonos de uma figura da sequência, qualquer que fosse o seu número. Neste ponto, os mesmos alunos que ao longo da tarefa utilizaram a estratégia aditiva, são os mesmos que fizeram uma generalização aritmética, aspeto que pode sugerir a existência de uma dificuldade ou ausência de preocupação em utilizar outra estratégia que leve à criação de uma regra geral que permita de modo eficiente determinar qualquer termo da sequência.

### 5.2.5. Reflexão

Nesta tarefa não foi disponibilizado qualquer material manipulável, circunstância que não impediu o desenvolvimento do trabalho autónomo, nem gerou quaisquer comentários por parte dos alunos. Doze alunos reconheceram que a sequência pictórica crescente formada por pentágonos tem a mesma lei de formação da figura explorada na tarefa anterior. Muitos alunos optaram por sistematizar a informação recolhida da sequência, através de símbolos matemáticos, desenhos e esquemas. Estes alunos referiram que estes registos são importantes pois, segundo eles, "facilitam a análise da sequência e a resolução das questões seguintes". No início da discussão coletiva da tarefa, vários alunos identificaram três estruturas que compõem a letra "S", designando-as por "cabeça" (formada por dois pentágonos, constantes ao longo da sequência), "tronco" (varia em número de pentágonos em função do termo) e "base" (formada por dois pentágonos, constantes ao longo da sequência). Estas terminologias foram amplamente aceites, difundidas e utilizadas pela maioria dos alunos ao longo da tarefa. Nesta tarefa e na anterior, existe uma questão que solicitava que os alunos completassem uma tabela formada por duas colunas, em que se relaciona o termo com o respetivo número de elementos. Verificou-se que para determinar termos distantes, muitos alunos optaram por completar a tabela e quando interpelados pelo professor em relação à utilização de outras estratégias, não manifestaram qualquer preocupação ou interesse em utilizar outra estratégia, pois "assim é mais fácil" (Afonso, grupo3). Alguns alunos usaram a estratégia aditiva, mas não representaram todos os termos, fizeram incrementos no número da figura e de igual modo no número de pentágonos. Os resultados evidenciam que as estratégias dos alunos podem ser condicionadas por questões anteriores e por relações entre os números que os alunos estabelecem, o que deve ser antecipado pelo professor na momento de planificação e discutido coletivamente na sala de aula.Quando o professor observa que o aluno enverda constantemente pela mesma estratégia para resolver uma determinada questão da tarefa, pode e deve criar mecanismos que promovam a utilização, experienciação e apropriação de outras representações e ideias alternativas e igualmente válidas, no caso do ensino exploratório da Matemática, provenientes do trabalho em pequeno grupo e das discussões coletivas.

Nesta tarefa os alunos pareceram identificar e compreender o que é solicitado na questão em que se reverte o raciocínio, revelando menos dificuldade, acontecimento que pode estar relacionado com a discussão tida na tarefa anterior, em que foi explorada uma questão similar. Os dados evidenciam que, nas diversas questões desta segunda tarefa, mais alunos utilizaram a estratégia da decomposição dos termos, estratégia que foi pouco visível na primeira tarefa em que a estratégia predominante foi a aditiva. Paralelamente a esta evidência verifica-se também a predominância da aplicação da generalização algébrica na segunda tarefa, visto ser a generalização aritmética a preponderante na primeira tarefa. Assim, ao longo da exploração das diversas questões da tarefa, as estratégias utilizadas por vários grupos indiciam um processo de generalização algébrica.

Em relação às diversas representações, a tabela da tarefa foi usada por alguns alunos como representação icónica para organizar e apresentar os dados, permitindo-lhes identificar e compreender com mais facilidade a regularidade presente. Alguns alunos desenharam os termos da sequência, usando assim uma representação externa icónica. A linguagem natural está novamente muito presente no desenrolar da tarefa, pois os alunos usaram-na para comunicar e justificar os seus raciocínios e estratégias. A representação externa simbólica também foi visível, sobretudo quando os alunos recorreram a expressões numéricas e a equações. A tabela, T3, em anexo sistematiza as estratégias e generalizações utilizadas e aplicadas pelos alunos ao longo da tarefa.

## 5.3.Sequência de árvores construídas com fósforos (Tarefa 3)

### 5.3.1. Características da tarefa

Nesta tarefa, os termos da sequência são figuras que recorre a arranjos visuais identificáveis com “árvores”. São apresentados três termos de uma sequência pictórica que são formados por fósforos e cuja respetiva constituição depende da sua ordem (Figura 51). Os termos apresentados são consecutivos. Nesta situação não existe uma parte que se mantém constante, sendo que a constituição dos termos varia em função da ordem. A sequência numérica relativa ao número de fósforos pode ser representada pela expressão algébrica do tipo *an.* Para além do enunciado da tarefa distribuído por cada aluno, disponibilizo fósforos de modo a possibilitar a construção dos termos, caso necessitem desse suporte para os analisar. De seguida, leio as questões no sentido de esclarecer e dissipar eventuais dúvidas, dando início ao trabalho em pequenos grupos.

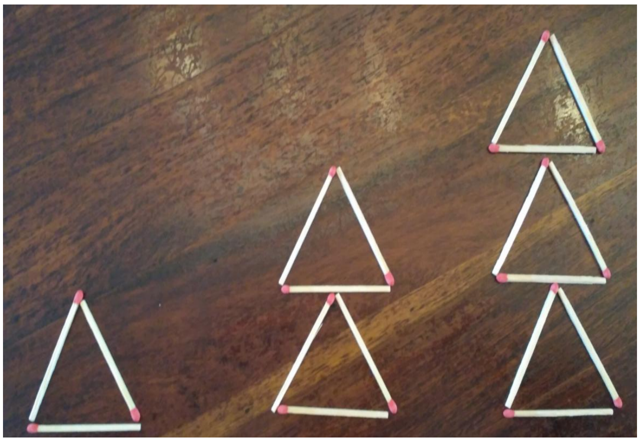


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Figura 51. Três primeiros termos da sequência pictórica da tarefa 3.

### 5.3.2. Estratégias utilizadas pelos alunos

**Termos próximos**

Os diversos grupos não revelam quaisquer dificuldades em resolver a questão 4.1., tendo todos representado corretamente as figuras 4 e 5 da sequência. Durante a resolução os alunos iam discutindo o rigor e qualidade das representações icónicas. Seis grupos procuraram sistematizar a informação obtida da sequência, contando e registando o número de fósforos de cada um dos termos da sequência, identificando a lei de formação, como exemplificam os registos do grupo 8 (figura 52).


Figura 52. Registo da lei de formação, Grupo 8, Tarefa 3, Questão 3.1.

Apenas quatro grupos reproduzem a sequência através de representações ativas. Contudo, durante a discussão coletiva revelaram que essa representação ocupou muito tempo e seria mais rápido e fácil se tivessem logo feito os desenhos. No início da discussão, vários alunos reconhecem o número mínimo de fósforos necessário para construir uma árvore, como refere Joana (grupo 3): “Para construir qualquer árvore é preciso no mínimo três fósforos, que é um triângulo”. Diogo (grupo 13) evidencia uma estratégia aditiva assente na composição pictórica dos termos, que se reflete no número de fósforos: “De figura para figura aumenta sempre um triângulo, que é três fósforos”, tal como expressa o registo do grupo (figura 53).


Figura 53. Registo da lei de formação, Grupo 13, Tarefa 3, Questão 3.1.

Na questão 3.2. os alunos têm de indicar o número de fósforos das figuras 4 e 5. Nove grupos utilizam a estratégia de representação e contagem, decorrente da questão 3.1., o que é evidenciado na discussão coletiva por vários grupos: “Contámos o número de fósforos das figuras”.

Na discussão coletiva emerge também a utilização da estratégia de decomposição do termo e relação com a sua ordem, como refere Gonçalo (grupo 1): “Fizemos a tabuada. Eu vi que a figura 4 tem três triângulos, fiz 3 vezes o 4”. Dois grupos utilizaram essa estratégia, como exemplificamos registos dos grupos 2 e 13 (figura 54 e figura 55).


Figura 54. Estratégia decomposição dos termos para os termos próximos, Grupo 2, Tarefa 3, Questão 3.2.

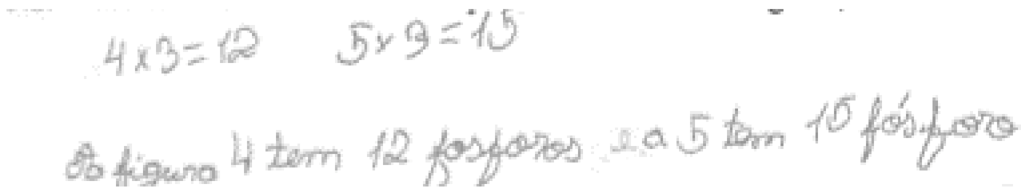



Figura 55. Estratégia decomposição dos termos para os termos próximos, Grupo 13, Tarefa 3, Questão 3.2.

O grupo 4 foi o único a utilizar a estratégia aditiva, adicionando três ao número de fósforos da figura anterior para obter o número de fósforos de uma figura, como se verifica na figura 56.


Figura 56. Estratégia aditiva para os termos próximos, Grupo 4, Tarefa 3, Questão 3.2.

**Termos distantes**

Na questão 3.3. os alunos têm de indicar o número de fósforos de uma figura distante, neste caso a 10.ªfigura da sequência. Todos os treze grupos responderam corretamente à questão, sendo que oito recorreram à estratégia de decomposição dos termos, três à estratégia aditiva, um à estratégia objeto inteiro e um à estratégia representação e contagem. Convidados a partilhar a sua estratégia com os colegas, o grupo 3 revela ter adicionado sucessivamente três, o que evidencia a utilização da estratégia aditiva (figura 57).

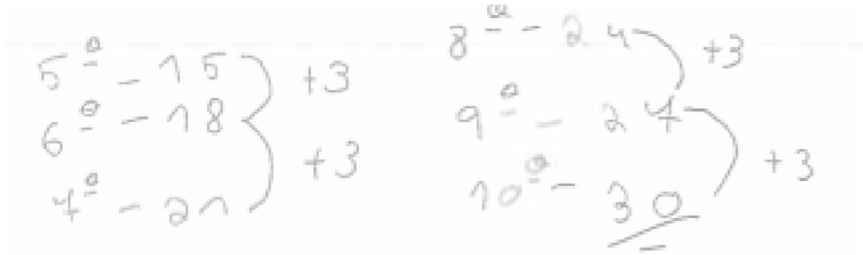



Figura 57. Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 3, Tarefa 3, Questão 3.3.

Na discussão coletiva, a intervenção de Diogo (grupo 13) ajudou os diferentes grupos a refletir sobre valor que multiplicam pelo número da figura, ou seja, o coeficiente de *n* na expressão geradora da sequência numérica (*an*), copiando para o quadro exatamente o que escreveu no registo (Figura 58).

> Diogo (grupo 13) - Eu multipliquei a figura 10 por 3 que é igual a 30.
> Prof. – O que é o 3? O que representa?
> Diogo – É o triângulo.
> Vários alunos – É o número dos fósforos.
> Rafael (grupo 12) – É um valor que se mantém sempre... multiplica sempre pelo número da figura.
> Flor (grupo 5) – O 3 é a tabuada do 3. Nós escrevemos que na tabuada do 3, 10 vezes é igual a 30, então a 10.ªfigura tem 30 fósforos.


A 10º figura tem 30 fósforos porque 3 x 10 = 30.
3 x 10 = 30

Figura 58. Estratégia de decomposição dos termos para os termos distantes, Grupo 13, Tarefa 3, Questão 3.3.

Outros grupos também foram desafiados a participar na discussão, tendo Gonçalo explicado a estratégia utilizada pelo grupo 1:"Como desenhámos a figura 5, eu vi o número de fósforos da figura 5 e se a figura 5 tem 15, multipliquei a figura 5 por 2 e deu a figura 10 e o 15 por 2 e deu 30 fósforos", situação explicitada na resposta do grupo 1 (figura 59). Trata-se de uma estratégia de objeto inteiro que neste caso particular conduz a uma resposta correta por se tratar de uma situação de proporcionalidade direta. Se o número da figura que se pretende obter ($n_2$) é múltiplo do número de uma dada figura ($n_1$), pode representar-se por $n_2 = kn_1$.Sendo a expressão geradora do tipo *an*, o número de fósforos da figura $n_2$ pode ser obtido multiplicando o número de fósforos da figura $n_1$, $an_1$, pelo fator *k*, obtendo-se que$an_1k = an_2$.

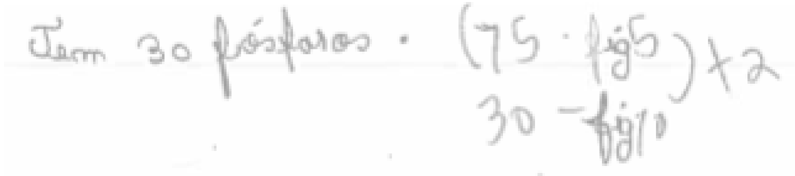

Tem 30 fósforos. (15 · fig5) x 2
30 – fig10

Figura 59. Estratégia objeto inteiro para os termos distantes, Grupo 1, Tarefa 3, Questão 3.3.

Francisco (grupo 6), alertou para o facto do seu grupo ter utilizado outra estratégia, cuja representação do termo 10 e resposta apenas com indicação do número total de fósforos (figura 60) sugerem a utilização da estratégia de representação e contagem.

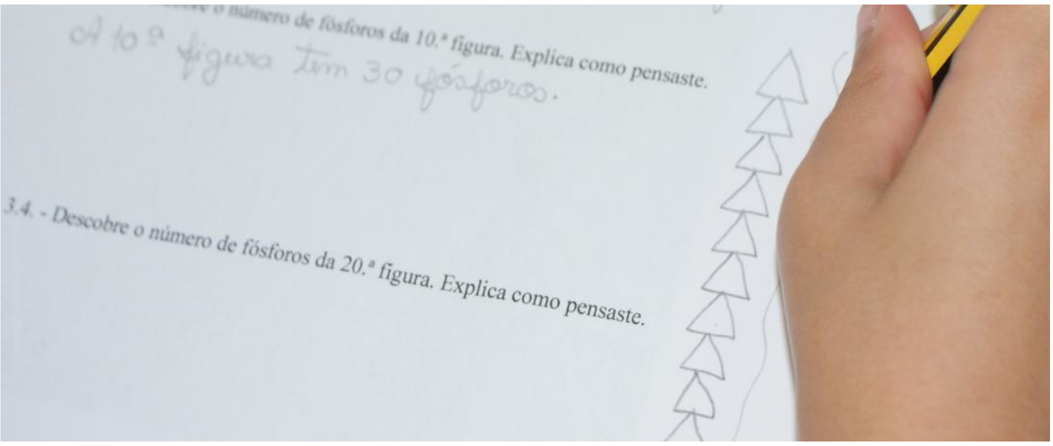



Figura 60. Estratégia representação e contagem para os termos distantes, Grupo 6, Tarefa 3, Questão 3.3.

Na questão 3.4. os alunos tinham de descobrir o número de fósforos da 20.ª figura. Dois grupos utilizaram a estratégia aditiva, sendo que um deles não respondeu corretamente, como se pode observar no registo (figura 61), A falta de rigor na organização do trabalho e na gestão do espaço disponível para responder à tarefa podem ter levado à incorreção na resposta, como sugere a resposta dada por José (grupo 8), quando confrontado na discussão coletiva: “Sim, não tínhamos muito espaço... Sim, não escrevemos na 18.ª figura, saltámos logo para a 19.ª figura”.

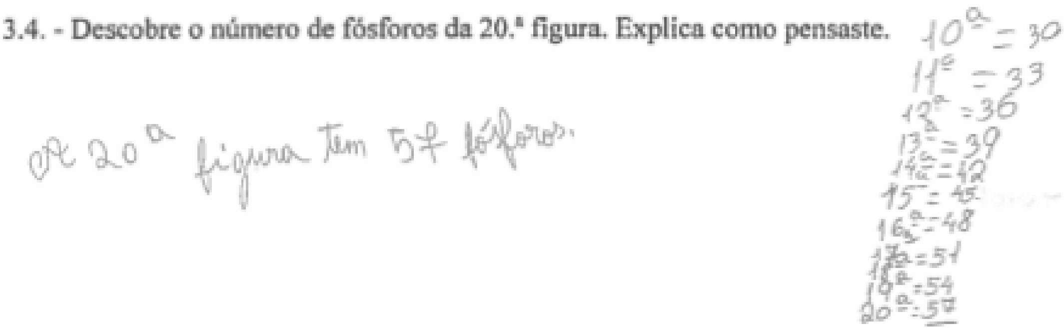



Figura 61. Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 8,  Tarefa 3,Questão 3.4.

Cinco grupos utilizaram a estratégia objeto inteiro, três recorreram à resposta dada na questão anterior para responder à questão 3.4. como se evidencia na justificação dada pelo Gonçalo (grupo1): “Se a figura 10 tem 30 fósforos, a figura 20 tem 60” . Tal aspeto também é retratado na resposta escrita do grupo 9 (figura 62). Este registo evidencia uma indicação incorreta da expressão numérica, em que o sinal de igual é usado como operador, ou seja, como sendo um sinal para a indicação de um resultado que lhe segue e não como equivalência entre duas expressões.

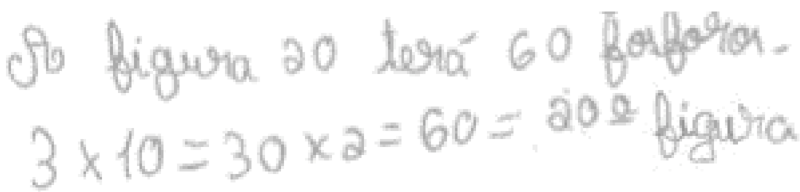


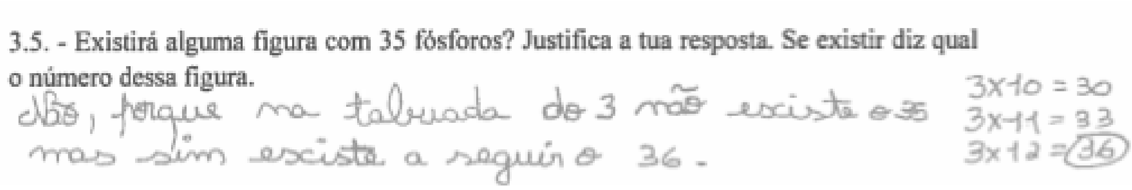

Figura 62. Estratégia objeto inteiro para os termos distantes, Grupo 9, Tarefa 3, Questão 3.4.

**Inverter o raciocínio**

Na questão 3.5. os alunos têm de inverter o raciocínio. O número 35 que é dado representa o total de fósforos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de fósforos. Quatro grupos utilizaram a estratégia aditiva, sete grupos a estratégia decomposição dos termos e dois grupos não responderam à questão. Da discussão coletiva começou por emergir o uso da estratégia decomposição dos termos, quando Carolina (grupo 9) refere que: “Na tabuada do 3 não está o 35”, Por sua vez, Rafael (grupo 12) acrescenta que: “Sim, multiplicamos sempre por 3”. Esta afirmação do Rafael relaciona-se como registo escrito do seu grupo (figura 63), evidenciando reconhecer que 35 não é um múltiplo de 3.


Figura 63. Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio inverso, Grupo 12, Tarefa 3, Questão 3.5.

Todos os outros grupos que utilizam a estratégia de decomposição dos termos, utilizam a palavra “tabuada” nas suas justificações, como evidencia a resposta dada por Bruno (grupo 4) na discussão coletiva: “Não, porque na tabuada do 3 não há 35.” E como se verifica no registo escrito do grupo 2 (figura 64).


3.5. - Existirá alguma figura com 35 fósforos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

Não, porque na tabuada do 3 não existe o 35 mas sim existe a seguir o 36.

3x10 = 30
3x11 = 33
3x12 = 36

Figura 64. Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio inverso, Grupo 2, Tarefa 3, Questão 3.5.

No sentido de procurar outras estratégias de resolução para serem discutidas em turma, Martim (grupo 10) explica que:"Não, não existe uma figura com 35 fósforos, porque se a figura 10 tem 30, a 11 tem 33, a figura 12 tem 36 ... Não há nenhuma figura com 35". Tal ideia é também explicitada nos registos efetuados pelo grupo 3 (figura 65). Estas justificações sugerem a utilização da estratégia aditiva.

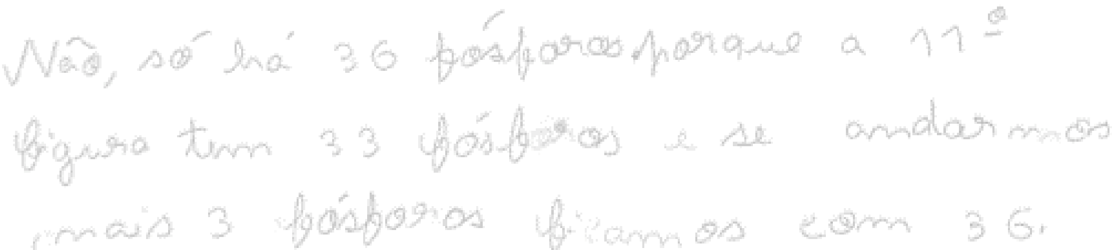

Não, só há 36 fósforos porque a 11ª figura tem 33 fósforos e se andarmos mais 3 fósforos ficamos com 36.

Figura 65. Estratégia aditiva para o raciocínio inverso, Grupo 3, Tarefa 3, Questão 3.5.

### 5.3.3. Generalizações apresentadas pelos alunos

Na questão 3.6. era pedido que os alunos explicassem como poderiam saber o número de fósforos de uma figura da sequência, qualquer que fosse o seu número. Oito grupos utilizam a estratégia decomposição dos termos, dois grupos utilizam a estratégia aditiva e três grupos não respondem à questão.

No momento da discussão coletiva, Alexandre (grupo 7) é convidado a partilhar a estratégia utilizada pelo seu grupo: "Posso saber o número de fósforos de uma figura multiplicando o número da figura pelo número de fósforos de um triângulo.", como se evidencia no registo escrito (figura 66).

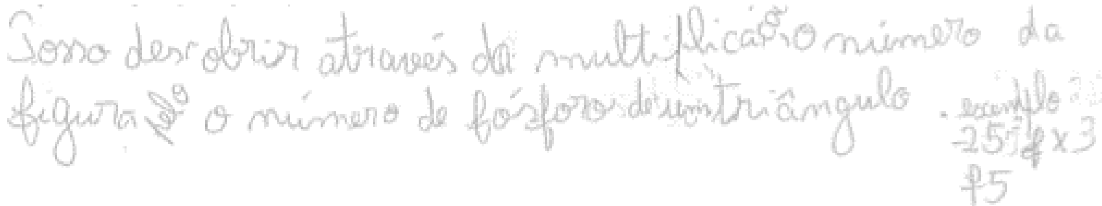


Figura 66. Generalização algébrica contextual e factual. Estratégia de decomposição dos termos para o generalizaação, Grupo 7,  Tarefa 3, Questão 3.6.

No total da turma, há seis alunos que apresentam generalizações aritméticas, doze alunos apresentam generalizações de natureza contextual e quatro alunos apresentam uma generalização factual e simultaneamente contextual (grupo 10, figura 67 e grupo 9, figura 68)

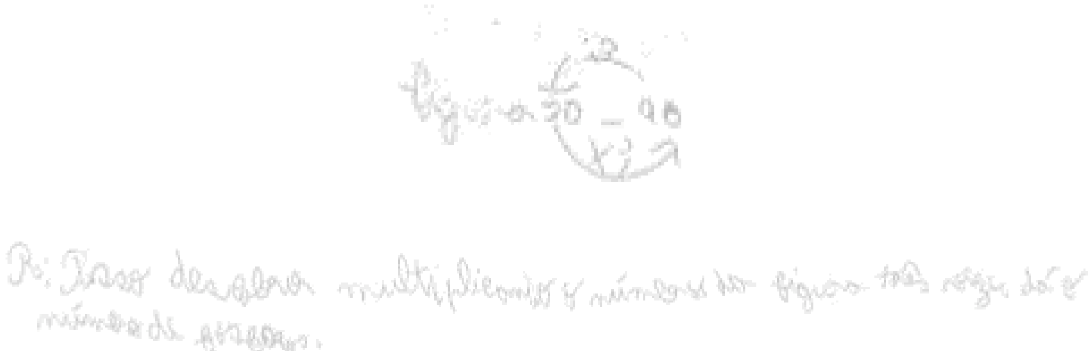


Figura 67. Generalização algébrica contextual e factual. Estratégia de decomposição dos termos para a generalização, Grupo 10,  Tarefa 3, Questão 3.6.

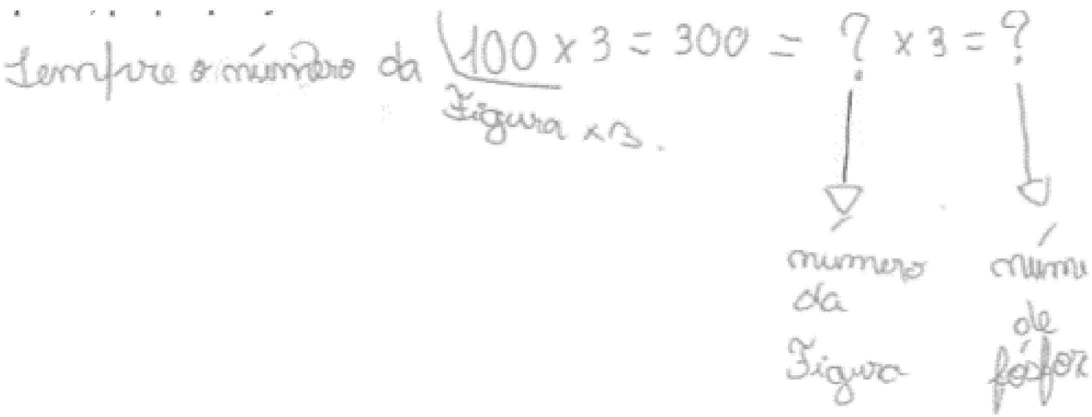



Figura 68. Generalização algébrica contextual e factual. Estratégia de decomposição dos termos para o generalização, Grupo 9,  Tarefa 3, Questão 3.6.

Nesta situação começou a emergir a utilização de um símbolo para representar o número que se desconhece, o do número da figura, estabelecendo na sua representação a ligação entre os três modos de generalização algébrica. A discussão coletiva ajudou a esclarecer vários grupos e a refletir sobre as generalizações feitas:

> Diogo (grupo 13) – O número de uma figura qualquer vezes 3, dá o número de fósforos.
> Prof. – Queres dar o exemplo com um número concreto para explicares aos teus colegas? 630 por exemplo, como é que descobrimos quantos fósforos tem a figura 630?
> Vários alunos – Multiplicamos por 3.
> Rafael (grupo 12) – 3 vezes o número da figura é igual ao número de fósforos [como se evidencia na figura 69
> Giovanna (grupo 8) – Multiplicando de 3 em 3 com o número da figura.
> Prof. – O que a Giovanna disse faz-vos sentido?
> Vários alunos – Não.
> Prof. – Temos de ter algumas palavras ou expressões que têm de estar presentes. Quais são?
> Vários alunos – “número da figura e número de fósforos”.
> Prof. – E...
> Rafael – O 3 que é o número de fósforos de um triângulo.
> Prof. – E sabendo o número de fósforos, como podemos determinar o número da figura?
> Vários alunos – Dividir por 3.
> Alexandre – E se dividir o número de fósforos pelo número da figura?
> Prof. – Sim, diz-me tu...
> Rafael e Gonçalo – 3, dá um triângulo.


Figura 69. Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 12, Tarefa 3, Questão 3.6.

No final do episódio os alunos conseguem identificar a constante de proporcionalidade direta e atribuem significado a esse valor constante tendo em conta a organização dos termos pictóricos.

### 5.3.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos

Nestas questões, a estratégia mais utilizada é decomposição dos termos”, pela relação que estabelecem com os múltiplos de 3. O único grupo (grupo 8) que não respondeu corretamente à questão, utilizou a estratégia aditiva. Os alunos do grupo 8escreveram todos os termos a partir da 10.ª figura, esquecendo-se de indicar o número de fósforos da 18.ª, circunstância que pode ter influenciado a incorreção da resposta. Na questão em que os alunos têm de inverter o raciocínio, o grupo 6 não justifica a sua resposta: “Não, não existirá nenhuma figura com 35 fósforos”. Na discussão coletiva, quando questionados, os elementos deste grupo referem que: “Se juntarmos sempre três fósforos, temos 33, depois o 36,...o 35 não dá”, o que remete para uma estratégia aditiva. Quatro alunos manifestaram dificuldade em responder à questão 3.6. Na discussão coletiva, estes alunos foram os primeiros a explicar as respetivas respostas escritas, no sentido de evitar a apropriação e influência de respostas de outros colegas. Um dos elementos do grupo 4 refere que “É multiplicar o número da figura por 3”. Os alunos do grupo 5 remetem para a resposta dada na questão que se seguia (Figura 70): “Na 3.4. fizemos 3x2 que deu 6 e juntámos um zero que dá 60” (Maria, grupo 5), que se refere à estratégia usada para multiplicar3 por 20.

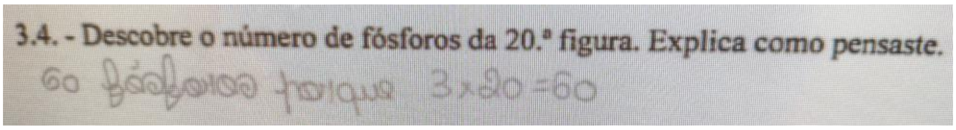



Figura 70. Estratégia decomposição dos termos para o raciocínio generalização, Grupo 5, Tarefa 3, Questão 3.4.

### 5.3.5. Reflexão

Mais uma vez, todos os grupos envolveram-se ativamente na exploração da tarefa, cooperando entre si e respeitando as regras inicialmente propostas. A discussão em grande grupo assumiu papel importante na apresentação e discussão de estratégias e na manifestação de dificuldades, nomeadamente no que se refere às estratégias, natureza da generalização e na justificação. Nos momentos de discussão coletiva é importante que todos os alunos percebam as estratégias e natureza de generalização apresentadas pelos colegas.

Foram disponibilizados fósforos como suporte na representação da figura solicitada na questão 3.1. Apenas quatro grupos recorreram à representação ativa, construindo as figuras solicitadas e desenhando-as em seguida na folha de resposta. Na fase inicial do trabalho autónomo, vários alunos referiram que optaram por não utilizar representações ativas pois, para além do tempo despendido, entenderam ser mais fácil e rápido fazer logo as representações icónicas. Todos os alunos identificaram o número mínimo de fósforos necessário para construir uma "árvore" relacionando-o com o número de lados do triângulo. Identificaram também que, ao longo da sequência, entre termos consecutivos, mantém-se uma regularidade. Vários alunos reconheceram que a sequência pictórica crescente formada por fósforos tem uma expressão geradora que lhes é conhecida, identificável com a tabuada do 3. Os alunos visualizaram um conjunto de três fósforos (triângulo) e reconheceram a relação multiplicativa entre o número da figura e o número de fósforos, ao longo da sequência. Nesta tarefa não é proposto o preenchimento de uma tabela com a ordem dos termos e respetivo número de fósforos. Contudo, seis alunos efetuaram representações cuja organização e conteúdo é identificável com as tabelas exploradas anteriormente, aspeto que pode sugerir que uma utilização recorrente desta estratégia, pode promover o seu constante uso, evitando o aluno a aplicação de outras ideias matemáticas e induzindo a utilização de estratégias aditivas. Os restantes alunos utilizam facilmente a estratégia decomposição dos termos para determinar o número de fósforos de termos distantes, aspeto que evidencia que mais alunos apresentam uma generalização algébrica. Em relação à questão em que têm de inverter o raciocínio, tal como aconteceu com a tarefa 2, os alunos compreenderam o que lhes era solicitado, aspeto que suscitou dúvidas na tarefa 1. Os alunos que utilizaram a estratégia de decomposição dos termos, recorrem aos múltiplos de 3 e à "tabuada do 3" para resolver a questão e justificar os procedimentos. A palavra "tabuada" foi muito utilizada pela maioria dos alunos, quer nos registos escritos, quer na discussão em grande grupo Este aspeto pode sugerir que os alunos mobilizaram os conhecimentos prévios, conseguindo realizar conexões matemáticas com outros conteúdos. Os resultados desta tarefa 3 revelam que os alunos que usaram a estratégia aditiva foram os mesmos que apresentaram uma generalização aritmética. Em relação à análise da última questão da tarefa, doze alunos apresentaram uma generalização algébrica contextual, e quatro alunos parecem ter apresentado simultaneamente generalização algébrica contextual e factual. Estas evidências podem estar relacionadas com a gestão que o professor faz da sala de aula, nomeadamente o no que se refere à implementação de um ensino devidamente estruturado que promove a discussão, a troca de ideias e de estratégia e síntese de resultados, aspetos contemplados no ensino exploratório da Matemática. Verifica-se uma maior utilização de símbolos matemáticos, em relação às tarefas anteriores, aspeto que pode promover o surgimento da generalização algébrica simbólica. Os dados evidenciam que, nas diversas questões da tarefa 3, a estratégia de decomposição dos termos é a mais utilizada pelos alunos.

Em relação às diversas representações, a sistematização e organização dos dados em estruturas similares a tabelas, permite-lhes identificar com mais regularidades, contudo é visível que os alunos que utilizaram as tabelas, apresentaram uma generalização aritmética, alguns alunos desenham os termos da sequência, usando assim uma representação externa icónica. A linguagem natural está, uma vez mais, muito presente no desenrolar da tarefa, pois os alunos usam-na para comunicar e justificar os seus raciocínios e estratégias. A representação externa simbólica também é visível, sobretudo quando os alunos recorrem a expressões numéricas e expressam a sua generalização. A tabela T4 em anexo, sistematiza as estratégias e generalizações utilizadas e aplicadas pelos alunos ao longo da tarefa.

## 5.4. Sequência de degraus que são formados por quadrados (Tarefa 4)

### 5.4.1. Caracterização da tarefa

Nesta tarefa, tal como nas anteriores, a sequência é crescente, pelo que os termos que constituem a sequência são diferentes e a respetiva constituição depende da sua ordem. Cada figura recorre a arranjos visuais identificáveis com "degraus". São apresentados quatro termos de uma sequência pictórica que são formados por quadrados (Figura 71). Os termos apresentados são consecutivos, sendo que nesta situação, tal como na Tarefa 3, não existe uma parte que se mantém invariante ficando toda a constituição dos termos dependente da ordem. À semelhança da Tarefa 3, a sequência numérica relativa ao número de quadrados pode ser representada pela expressão algébrica do tipo *an*. Contudo, nesta tarefa, não foram disponibilizados quaisquer materiais manipuláveis, o que impossibilita a realização de representações ativas.

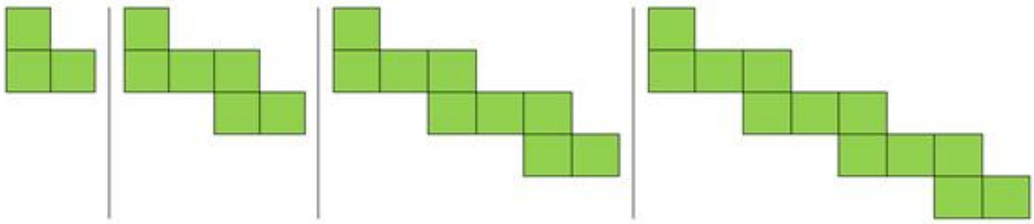


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

Figura 71. Quatro primeiros termos da sequência pictórica, Tarefa 4.

### 5.4.2. Estratégias utilizadas pelos alunos

#### Termos próximos

Todos os grupos representaram corretamente a figura 5 e a figura 6 da sequência. Mais uma vez, as divergências que iam surgindo no momento do trabalho autónomo, estavam relacionadas com o rigor e particularidade das representações icónicas dos termos. Seis grupos (1, 3, 5, 6, 8, e 10) sistematizaram a informação recolhida da sequência através de símbolos matemáticos, desenhos e esquemas, para responder às primeiras questões. Cinco grupos começaram por contar o número de quadrados dos termos dados, identificando a lei de formação, como exemplifica o registo do grupo 5 (figura 72).

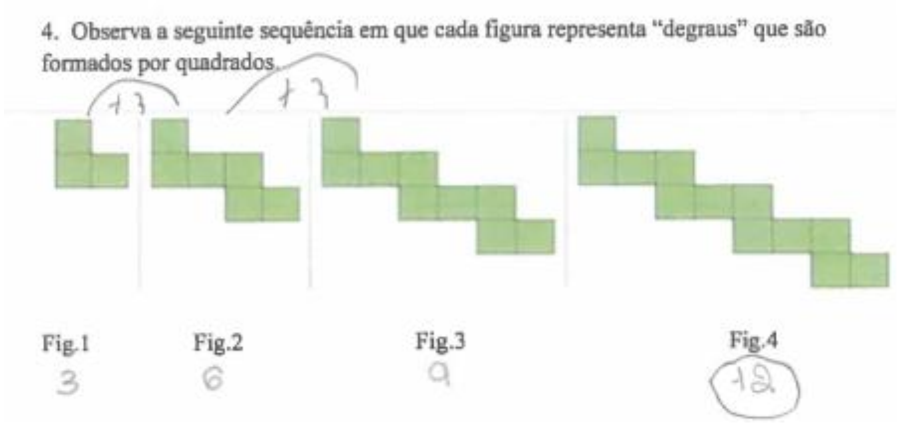



Figura 72. Registo da lei de formação, Grupo 5, Tarefa 4, Questão 4.1.

No início da discussão coletiva, os dez grupos que utilizaram a estratégia decomposição dos termos, referiram que, durante o trabalho em grupo, reconheceram que a lei de formação da sequência desta tarefa é igual à da tarefa anterior, a Tarefa 3, aspeto que, segundo eles, facilitou as respostas às questões propostas nesta tarefa. Durante a discussão, e como forma de facilitar a comunicação e a organização das ideias, alguns grupos referiram a existência de uma estrutura composta por três quadrados, sendo que o 1.º termo é composto por uma dessas estruturas e, ao longo da sequência, vai-se acoplando sempre mais um conjunto de quadrados. Deste modo, estes grupos identificam que a figura 1 são degraus compostos por 3 quadrados, a figura 2 são degraus compostos por seis quadrados, a figura 3 são degraus compostos por 9 quadrados e a figura 4 são degraus compostos por 12 quadrados. O registo escrito do grupo 1 (figura 73) evidencia a identificação da estrutura formada por 3 quadrados, que se adicionam de uma figura para a seguinte, remetendo para uma estratégia aditiva.


Figura 73. Identificação das partes constituintes nos termos, Grupo 1, Tarefa 4, questão 4.1.

Esta relação também é salientada por Francisco (grupo 6), referindo que: "De figura para figura vai-se sempre juntando um degrauzinho de 3 quadrados".

Os grupos 3, 5 (Figura 74) e 7, para além dos desenhos das figuras 5 e 6, indicam também o número de quadrados dessas figuras, o que sugere a utilização da estratégia de representação e contagem, aspeto solicitado na questão 4.2.

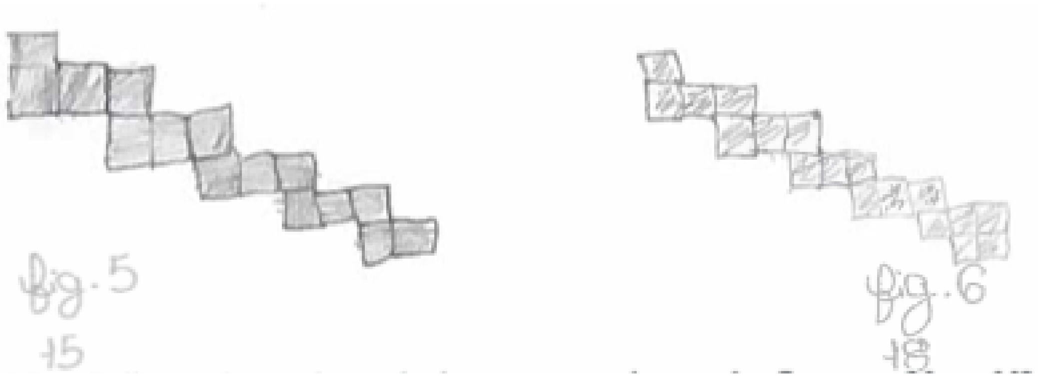



Figura 74. Estratégia de representação e contagem, Grupo 5, Tarefa 4, questão 4.2.

Na discussão coletiva, Rafael (grupo 12) identificou a relação multiplicativa entre o número da figura e o número de quadrados que a formam. Os grupos 1, 3 e 12 utilizaram a estratégia de decomposição dos termos, relacionando o número de conjuntos de três quadrados presentes em cada figura com o número da figura. Os outros sete grupos que revelaram ter relacionado a lei de formação desta tarefa com a anterior, utilizaram outras estratégias.

> Prof. – Rafael, como determinaram o número de quadrados da figura 5 e da figura 6?
> Rafael – Multiplicamos por 3.
> Gonçalo (grupo 1) – Nós também. Era como a regra que usámos na tarefa das árvores.
> João (grupo 2) – Nós também multiplicamos, o 3 vezes 5 e 3 vezes 6.

O Grupo 10 usou uma estratégia aditiva. Leonor (grupo 10) foi convidada a participar na discussão. Referiu que para calcular o número de quadrados das figuras 5 e 6, partiram da figura 3 que tem 9 quadrados, tendo continuado a sequência, como mostra a figura 75.

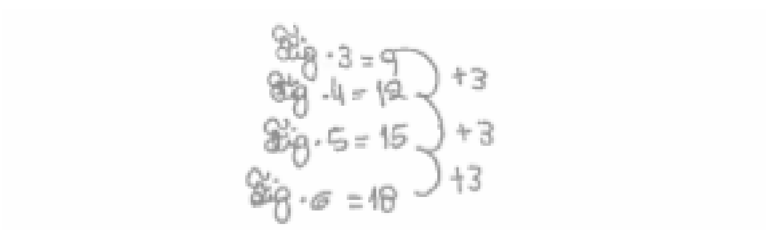



Figura 75. Estratégia aditiva, Grupo 10, Tarefa 4, Questão 4.2.

## Termos distantes

Na questão 4.3. os alunos indicaram o número de quadrados de uma figura distante, neste caso, a 12.ª figura da sequência. Todos os grupos responderam corretamente à questão. Dez utilizaram a estratégia de decomposição dos termos, um a estratégia objeto inteiro e dois grupos utilizam a estratégia aditiva, como explicita a resposta do grupo 3 (figura 76).

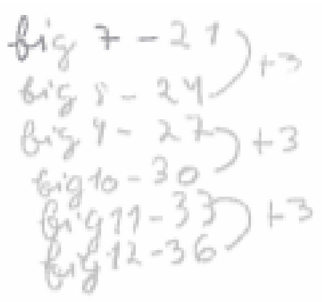



Figura 76. Estratégia aditiva, Grupo 3, Tarefa 4, Questão 4.3.

Na estratégia de decomposição dos termos, alguns grupos indicaram o produto $3 \times 12$ e outros $12 \times 3$, sendo que todos reconheceram a comutatividade dos fatores na multiplicação. Seis grupos recorreram ao cálculo mental e os restantes grupos recorreram ao algoritmo para determinar o número de quadrados da 12.ª figura, como é o caso do grupo 1 (figura 77).

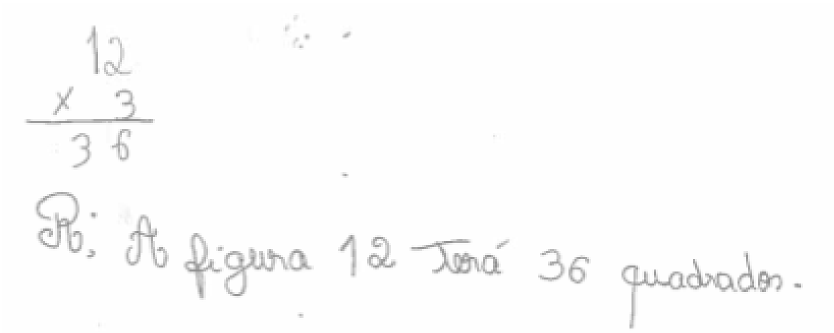



Figura 77. Uso do algoritmo, Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 1, Tarefa 4, Questão 4.3.

O Grupo 8 utilizou a estratégia de objeto inteiro. Giovanna (grupo 8) reproduz no quadro o que o grupo escreveu na folha de resposta (figura 78) durante o trabalho autónomo e explica que: “Na 6.ª figura havia 18, como 6 vezes 2 dá 12, então 18 vezes 2 dá 36”, evidenciando o raciocínio proporcional. Este grupo organizou os dados em tabela, deixando perceber a relação de covariação nas duas grandezas.

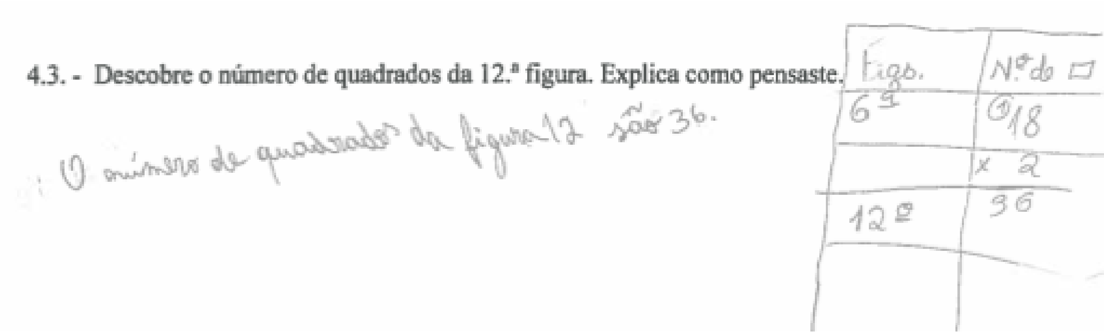



Figura 78. Estratégia objeto inteiro, Grupo 8, Tarefa 4, Questão 4.3.

Da discussão emergiu uma regra geral expressa por Rafael, que relaciona o termo com a sua ordem: “Para sabermos o número de quadrados, multiplicamos a figura por 3” (Rafael, grupo 12). Apesar de terem identificado que a lei de formação desta tarefa era igual à da tarefa anterior, formalmente, os alunos ainda não tinham expressado uma expressão geradora adequada a esta tarefa que referisse especificamente os termos desta sequência. Tanto na determinação de termos próximos como termos distantes, apenas três grupos organizaram a informação em forma de tabela e destes, dois utilizaram a estratégia aditiva. A explicação dada pela Giovanna através da tabela sugere uma situação de proporcionalidade direta, em que informalmente, os alunos fazem o seu correto preenchimento, reconhecendo que “número de quadrados” e “número da figura” são diretamente proporcionais, cuja constante de proporcionalidade é 3, representando o terno de quadrados que formam um degrau.

Na questão 4.4. os alunos voltaram a indicar o número de degraus de uma figura distante, neste caso a 25.ª figura. Excetuando os alunos dos grupos 3 e 8 e 13, que utilizaram a estratégia aditiva, os restantes vinte alunos usaram a estratégia decomposição dos termos”. Afonso (grupo 3) foi desafiado a participar na discussão em coletiva, tendo reproduzido no quadro a resolução da questão 4.4., como se apresenta na figura 79.

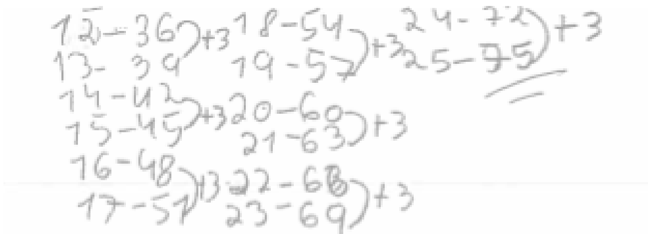


Figura 79. Estratégia aditiva, Grupo 3, Tarefa 4, Questão 4.4.

Na discussão, Afonso (grupo 3) afirma que: “Como era só até à figura 25, fizemos a sequência de 3 em 3 a partir do 12 ... Se fosse um número maior, multiplicava por 3”. Este grupo insistiu sempre em completar e construir tabelas e a continuação das sequências, recorrendo à estratégia aditiva. Contudo, Afonso mostrou reconhecer a expressão direta que lhe permitiu calcular o número de quadrados dado o número da figura.

Os grupos 4, 9 e 12, apesar de também terem utilizado a estratégia decomposição dos termos, apresentando a expressão geradora, realizaram cálculos distintos comparativamente à questão 4.3. O grupo 4 usou a propriedade multiplicativa da multiplicação em relação à adição, em indicar que a estavam a usar, decompondo o 25 como 20 + 5 (figura 80).

Figura 80. Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 4, Tarefa 4, Questão 4.4

Relativamente a esta estratégia de cálculo de $25 \times 3$, Mariana (grupo 4) esclareceu que: “Vimos que 25 é igual a 20 mais 5 e depois multiplicamos o 20 por 3 que dá 60 e o 5 por 3 que dá 15, depois somámos e dá 75”.

Por sua vez, o grupo 9 recorreu a um produto conhecido e relacionou-o com o produto pretendido, recorrendo também à propriedade distributiva agora usando a decomposição de 3 como $4 - 1$.

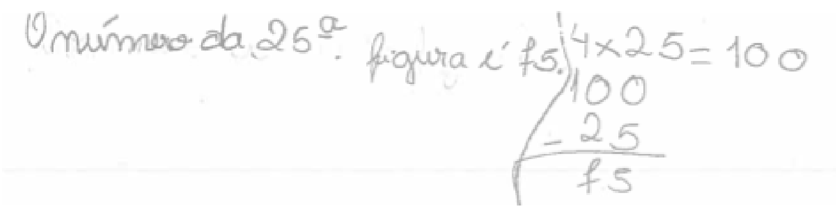



Figura 81. Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 9, Tarefa 4, Questão 4.4

A explicação da estratégia de cálculo é apresentada por Salvador (grupo 9): “Porque 4 vezes 25 era um cálculo que nós já sabíamos e depois tirámos o 25 porque era 3 vezes o 25, não era 4 vezes”.


Figura 82. Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 12, Tarefa 4, Questão 4.4

O grupo 12 também fez a decomposição do 25, mas como 24 + 1. Rafael (grupo 12) explicou a resolução feita pelo seu grupo; “25 que é o número da figura menos 1, que é menos a figura 1 que é igual a 24 depois multiplicamos 24 por 3, que são aqueles grupos de 3” (apontando para os ternos de quadrados da folha), que vai dar 72. Depois juntamos mais uma figura [de três] e dá 75”. No final Rafael reconheceu que “a maneira mais fácil era multiplicar 25 por 3”.

**Inverter o raciocínio**

Na questão 4.5. os alunos tinham de inverter o raciocínio. O número 43 representa agora o número total de quadrados, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de quadrados. Quatro grupos utilizaram a estratégia aditiva e nove grupos a estratégia de decomposição dos termos. Os 4 grupos que utilizaram a estratégia aditiva, continuaram a sequência, como está evidente na resolução do grupo 11 (figura 83), e verificaram que 43 não estava na sequência.

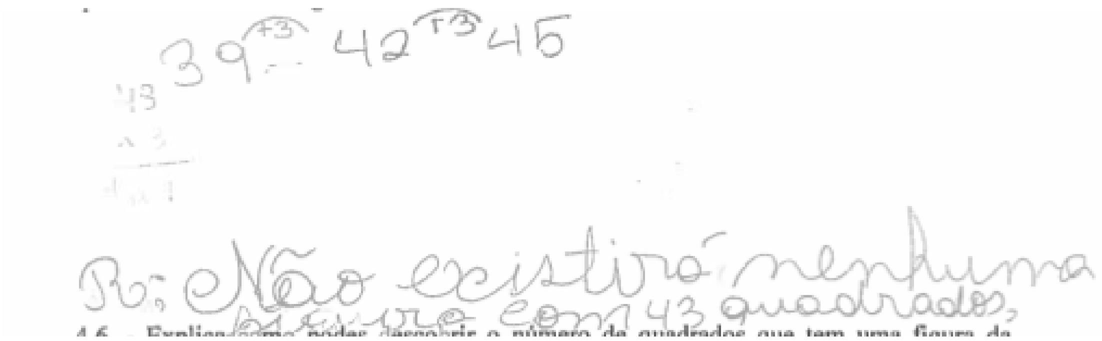



Figura 83. Estratégia aditiva, Grupo 11, Tarefa 4, Questão 4.5.

Excetuando o grupo 1, todos os outros que utilizaram também a estratégia decomposição dos termos, valeram-se da mesma justificação: “Não existe nenhuma figura com 43 quadrados porque o 43 não está na tabuada do 3”. Da discussão coletiva, emerge a ideia de que “O número de fósforos tem de ser múltiplo de 3” (Salvador, grupo 9). Chamado a participar na discussão, Gonçalo (grupo 1), reproduziu no quadro o que o seu grupo escrevera no enunciado relativamente à questão 4.5. (figura 84).

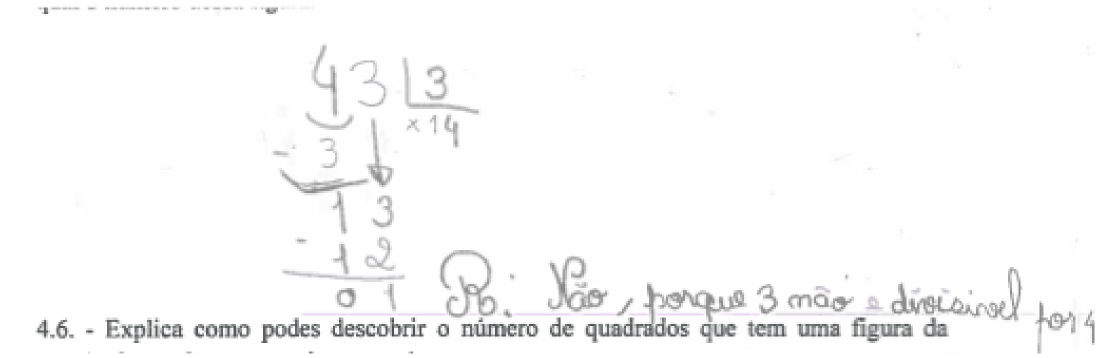



Figura 84 Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 1, Tarefa 4, Questão 4.5.

> Gonçalo (grupo 1) - Nós fizemos a divisão por 3 e se não desse resto zero nós percebíamos que não era divisível por 3.
> Prof. – O que é ser divisível?
> Vários alunos – É dar resto zero!
> Prof. – Então, 43 não é… O quê em relação ao 3?
> Vários alunos – Divisível.
> Outros alunos – Múltiplo.
> Gonçalo (grupo 1) – Se o número é múltiplo de 3, é divisível por 3.
> Rafael (grupo 12) – Sim, tem de estar na tabuada!
> João (grupo 2) – E 4+3 dá 7 e sete não é múltiplo de 3... mas só podemos usar esta regra no 5.º ano

### 5.4.3. Generalizações apresentadas pelos alunos

Na questão 4.6. era pedido que os alunos explicassem como poderiam saber o número de quadrados de uma figura da sequência, qualquer que fosse o seu número. Todos os grupos utilizam a estratégia decomposição dos termos. Relativamente às generalizações apresentadas, um grupo exprimiu generalização algébrica factual, dez grupos generalizações de natureza algébrica contextual e dois grupos apresentaram simultaneamente generalização algébrica factual e generalização algébrica contextual. generalização algébrica simbólica.

No momento da discussão coletiva, Leonor (grupo 10) reproduz no quadro a resolução do grupo (figura 85), evidenciando a utilização a relação que estabelece entre o número da figura e o total de quadrado, apresentando uma generalização algébrica factual.


Figura 85. Generalização algébrica factual. Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 10, Tarefa 4, Questão 4.6.

Da discussão, vários alunos referiram expressões que sugerem uma expressão geradora da sequência numérica: “Multiplicando o número da figura por 3, ficamos a saber o número de quadrados dessa figura” (Vários alunos). Desafiada a participar na discussão, Raquel (grupo 1) expressou o seguinte: “Fizemos o número da figura vezes 3 é igual ao número de quadrados”, como se explicita no registo produzido pelo seu grupo (figura 86) e que sugere uma generalização algébrica que combina linguagem natural com símbolos matemáticos, fazendo a referência ao contexto da sequência.

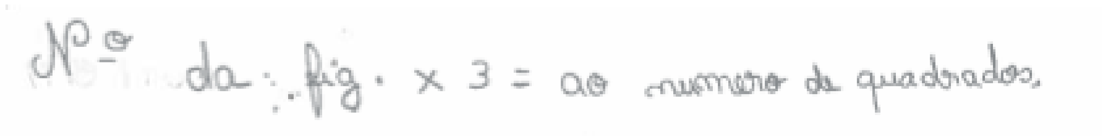



Figura 86. Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 1, Tarefa 4, Questão 4.6.

> Gonçalo (grupo 1) – Esta regra permite-nos calcular o número de quadrados para qualquer figura.
> Rafael (grupo 12) – Sim, basta substituir.
> Prof. – E se vos apresentarem um determinado número de quadrados, como podem determinar o número da figura?
> Gonçalo (grupo 1) – Dividir por 3.

Também José apresenta aos colegas a resolução feita pelo do seu grupo, que apresenta uma generalização algébrica contextual (figura 87) em que prevalece o uso da linguagem natural.

Multiplicando por 3 o número da figura.

Figura 87. Generalização algébrica contextual, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 8, Tarefa 4, Questão 4.6.

### 5.4.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos

Todos os grupos representaram corretamente à figura 5 e a figura 6 da sequência, as dificuldades que iam surgindo, prendem-se com o rigor das representações icónicas. Durante o trabalho autónomo, vinte alunos, reconhecem que a lei de formação da tarefa 4 é igual à da tarefa 3. Os alunos que não conseguiram identificar a existência da mesma lei de formação durante o trabalho autónomo, fizeram-no no momento de discussão coletiva As dificuldades associadas à estratégia representação e contagem devem-se ao rigor de algumas representações icónicas apresentadas pelos alunos, aspeto que fica mais evidente quando o número do termo é de uma ordem superior. Nas questões em que os alunos têm de determinar o número de quadrados de termos distantes, também não se verifica qualquer dificuldade na resolução, aspeto que pode estar relacionado com a mobilização de conhecimentos prévios, nomeadamente a tabuada do 3 e os múltiplos de um número natural, assim como, o paralelismo que fizeram com as estratégias e procedimentos utilizados na tarefa 3, aspeto que segundo os alunos, foi um elemento facilitador na resolução desta tarefa. Na questão em que os alunos têm de inverter o raciocínio, apesar de não terem manifestado dificuldades na respetiva resolução, a maioria cingiu-se à justificação utilizada na questão anterior, nomeadamente a utilização da tabuada e respetiva verificação dos produtos. Quando confrontados com a verificação de um número bastante elevado de objetos através da tabuada, revelaram dificuldade em expressar justificações válidas, sendo que, apenas dois alunos referiram prontamente "tínhamos de ver se esse número era divisível por 3" (Gonçalo e Rafael). Apesar das respostas corretas, as estratégias utilizadas pela maioria dos alunos não se adequam à natureza da questão, nenhum aluno verificou que dividindo o número de objetos por três (constante de proporcionalidade), o eventual número inteiro, representaria o número da figura.

Todos os alunos responderam corretamente à última questão da tarefa, apresentando generalizações algébricas, não se verificando a utilização de generalização aritmética. Excetuando dois alunos que não conseguiram expressar por linguagem natural uma lei de formação, utilizando exemplos de termos distantes, os restantes alunos utilizaram linguagem oral ou escrita para responder à questão. Associados à linguagem escrita, utilizaram também alguns símbolos matemáticos o que sugere que a lei de formação por eles criada, se traduz em expressões com aspetos e conteúdos semelhantes `s expressões algébricas.

### 5.4.5. Reflexão

Os grupos registaram a informação recolhida da análise da sequência pictórica “Degraus que são formados por quadrados” através de símbolos matemáticos, desenhos e esquemas. Consideraram que estes apontamentos são elementos importantes na compreensão da sequência. Apesar de na questão 4.2. terem contado o número de quadrados, muitos alunos identificaram que a sequência pictórica da tarefa 4 tem a mesma estrutura matemática que a da tarefa anterior. Este reconhecimento, de acordo com relatos proferidos por vários alunos durante o trabalho autónomo e no momento da discussão coletiva, tornou mais fácil a resolução da tarefa, sugerindo uma diminuição na utilização da estratégia aditiva e um acréscimo na utilização das estratégias objeto inteiro e de decomposição dos termos, conseguindo estabelecer generalizações algébricas com as referidas estratégias. Os alunos reconheceram que a unidade que se repete é composta por três elementos e que a regularidade presente nos múltiplos de 3 é evidente para eles.

Todos os alunos se envolveram ativamente no trabalho realizado em grupo e há mais diálogo e troca de ideias entre eles sobre o desenvolvimento da tarefa. A discussão em grande grupo assumiu, mais uma vez, um papel importante na partilha e discussão de estratégias e na manifestação de dificuldades, que foram cada vez mais pontuais. Foi na discussão coletiva que os alunos refletiram sobre as suas próprias respostas, contactaram com as estratégias e representações de outros grupos, apropriando-se das relações estabelecidas e de diferentes modos de as expressar.

Todos os alunos identificaram o número mínimo de quadrados necessário para construir um “degrau”. Reconheceram também que, ao longo da sequência, entre termos consecutivos, se mantém uma regularidade. Contudo, já não é a estratégia aditiva a que prevalece, predominando agora a relação direta entre o número da figura e o total de quadrados que evidencia que o número de vezes que o conjunto de três quadrados se repete depende do número da figura. Também nesta tarefa não foi apresentada uma tabela para completar com os termos e respetivos números de quadrados. Na tarefa 3, seis alunos efetuaram representações cuja organização e conteúdo é identificável com tabelas, nesta tarefa apenas um grupo organizou da informação desse modo. Relativamente aos processos de generalização, identifico uma evolução na sua capacidade de generalizar e expressar essa generalização. Nenhum grupo fez uma generalização algébrica e apenas dois alunos apresentaram uma generalização algébrica factual. Assim, a quase totalidade dos alunos apresentaram uma generalização algébrica contextual em que utilizam a linguagem natural e símbolos matemáticos para expressarem as suas generalizações. No momento de discussão coletiva foi evidenciada a possibilidade de substituírem as palavras por simbologia matemática, analisando o exemplo de colegas que nas suas respostas apresentaram expressões com esses símbolos. Catorze alunos referiram que consideraram esta tarefa mais simples, pois mobilizaram os conhecimentos anteriores para esta tarefa.

Alguns alunos desenharam os termos da sequência, usando assim uma representação externa icónica. A linguagem natural esteve, uma vez mais, muito presente na tarefa, pois os alunos usaram-na para comunicar e justificar os seus raciocínios e estratégias. A representação externa simbólica também é visível, sobretudo quando os alunos recorrem a expressões numéricas e a equações no cálculo de termos próximos e distantes, reverter o raciocínio e expressar generalizações. A tabela T5, em anexo, sistematiza as estratégias e generalizações utilizadas e aplicadas pelos alunos ao longo da tarefa.

## 5.5.“Sequência letras “A” com fósforos” (Tarefa 5)

### 5.5.1. Características da tarefa

Na sequência crescente d esta tarefa cada figura recorre a arranjos visuais identificáveis coma letra “A” (Figura 88). São apresentados os três primeiros termos da sequência pictórica que são formados por fósforos e cuja respetiva constituição se relaciona coma sua ordem. Os termos têm uma parte que se mantém constante, formada por três fósforos e uma parte que varia em função da ordem, tendo a sequência numérica do número de fósforos uma expressão geradora do tipo $an + b$. Aos alunos são disponibilizados fósforos de modo a possibilitar a construção dos termos, caso necessitem desse suporte para os analisar.

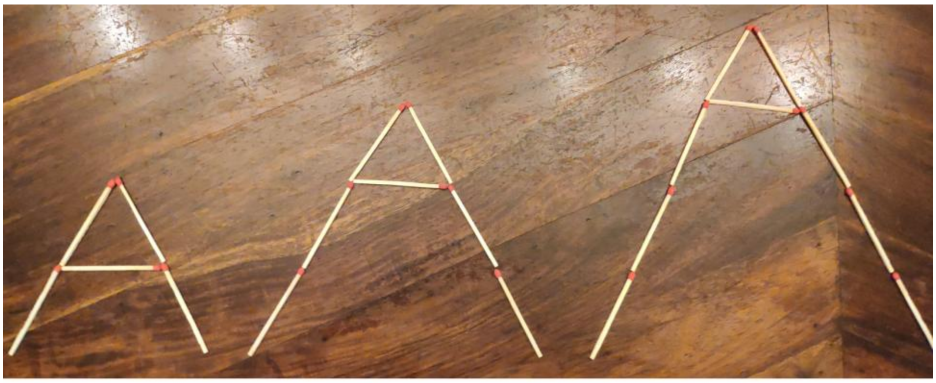


Figura 1 Figura 2 Figura 3

Figura 88. Três primeiros termos da sequência pictórica da tarefa 5.

### 5.5.2. Estratégias utilizadas pelos alunos

**Termos próximos**

Os grupos não revelaram dificuldades na resolução da questão 5.1., com exceção de um grupo. Durante o trabalho autónomo, as pequenas discussões que vão surgindo estão relacionadas com o rigor e qualidade das representações icónicas. Quatro grupos sistematizaram a informação obtida dos termos apresentados, contando e registando o número de fósforos e identificando a lei de formação, como se exemplifica no registo do grupo 10 (figura 89). Para estes alunos, os registos permitiram "perceber o que acontece quando se passa de figura para figura" (Joana, grupo 3), evidenciando uma estratégia aditiva.


Figura 89. Registo da lei de formação, Grupo 10, Tarefa 5, Questão 5.1.

Oito grupos reproduziram a sequência através da representação ativa (figura 90). Contudo, durante a discussão em grupo, admitiram que demoraram muito tempo, referindo que foi um foco de distração para alguns colegas e que esta representação não foi muito importante na resolução da tarefa, pois, segundo vários alunos, teria sido mais rápido e fácil se tivessem logo feito os desenhos (representações icónicas).

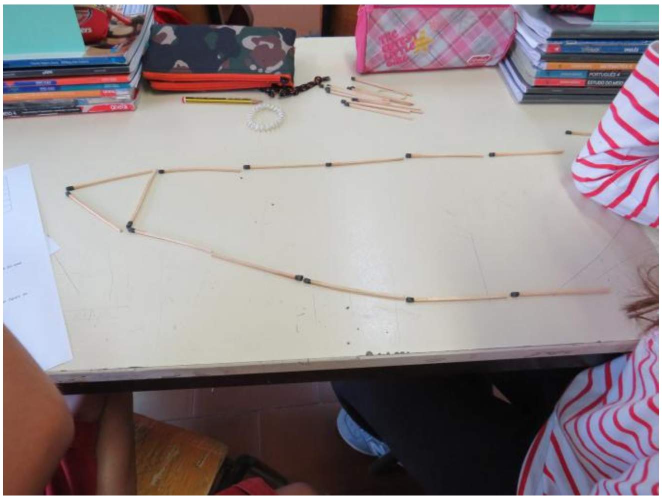


Figura 90 – Representação ativa, Grupo 4, tarefa 5, Questão 5.1.

Para resolver a questão 5.2., cinco grupos utilizam a estratégia de representação e contagem, seis grupos a estratégia aditiva e dois grupos a estratégia de decomposição dos termos. Vários alunos reconheceram o número mínimo de fósforos necessário para construir uma letra “A”, como referiu João (grupo 2): “Para construir qualquer letra “A” é preciso no mínimo 5 fósforos”. Esse aluno reproduziu a figura 4 da sequência no quadro (figura 91) e explicou que: “Nós contámos os de baixo e contámos que eram 8 e somámos os de cima que são 3 ... 8+3 dá 11”, evidenciando uma estratégia de decomposição dos termos.

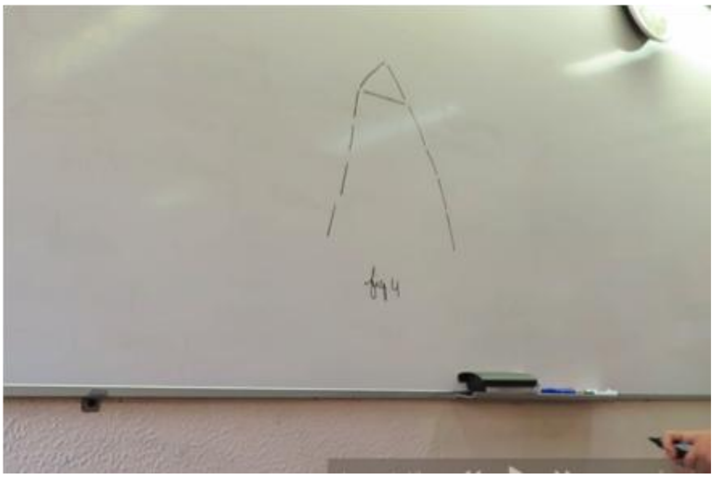



Figura 91. Registo da lei de formação, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2, Tarefa 5, Questão 5.2.

O grupo 6 também usou uma estratégia de decomposição dos termos, mas apresentou um outro modo de decompor o termo.

Francisco explicou que na figura 4 "também contámos os fósforos dos lados, mas em vez de 4, contámos 5 e somámos 1", referindo-se este a um ao fósforo que une os lados formados pelos 5 fósforos, como está indicado na produção escrita do grupo (figura 92).


Figura 92. Estratégia decomposição dos termos, Grupo 6, Tarefa 5, Questão 5.2.

Por seu lado, a resolução do grupo 8 é representativa do uso da estratégia aditiva (figura 93). Giovanna (grupo 8) referiu que: "Vimos que a figura 3 tem 9 fósforos e como anda sempre de 2 em 2, 9 mais 2 dá 11".

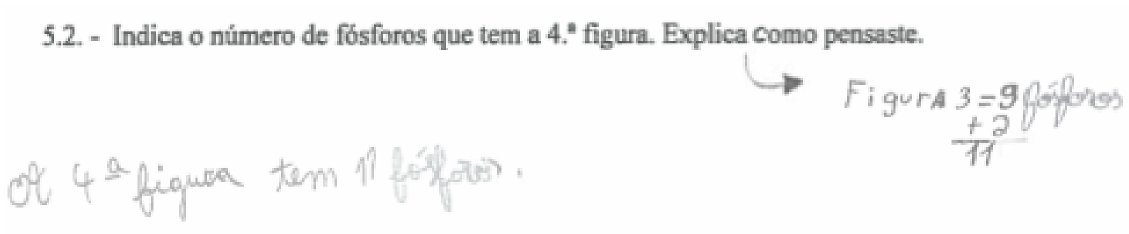



Figura 93. Estratégia aditiva, Grupo 8, Tarefa 5, Questão 5.2.

Na questão 5.3. os alunos tinham de completar a tabela. Na discussão coletiva, excetuando o grupo 12, todos os outros grupos referiram que para a completar "adicionaram sempre mais 2", o que sugere a utilização da estratégia aditiva. Convidado a participar na discussão, Rafael (grupo 12) registou no quadro o 1.º termo da sequência (figura 94) e explicou o modo como a decompõem.

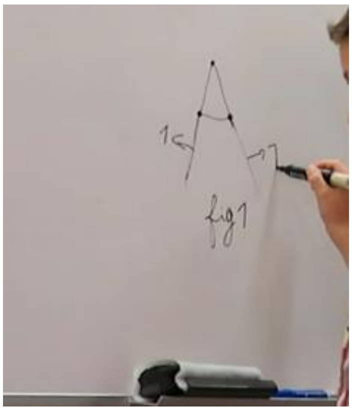



Figura 94. Estratégia de decomposição dos termos, Grupo 12, Tarefa 5, Questão 5.3.

> Rafael (grupo 12) - Nós fizemos o número da figura, que é o lado cá de baixo e um lado é igual ao outro [aponta para os segmentos que indicou com1], fizemos a figura 1 é igual a este 1 mais o outro que dá 2 mais estes 3 cá de cima que dá 5.
> Prof. – E isto é válido para qualquer figura?
> Gonçalo (grupo 1) – Sim , a figura 2 é 2+2+3, 2 de um lado, 2 do outro lado mais 3 de cima.
> Prof. – Salvador, a figura 5? Seguindo esta ideia do grupo do Rafael, como justificarias?
> Salvador (grupo 9) – Deu 13. Então teria ... 5 de um lado mais 5 do outro mais 3 em cima...

A discussão coletiva permitiu envolver os alunos na análise dos termos e no estabelecimento de relações entre partes da sua constituição e a sua ordem na sequência.

**Termos distantes**

Na questão 5.4. os alunos tinham de indicar o número de fósforos de uma figura distante, neste caso a 13.ª figura da sequência. Excetuando os grupo 4, 9 e 11, todos os outros responderam corretamente à questão, sendo que dois grupos utilizaram corretamente a estratégia de decomposição dos termos e nove grupos usaram a estratégia aditiva,continuando a tabela até ao termo solicitado, como se explicita na produção escrita do grupo 5 (figura 95).

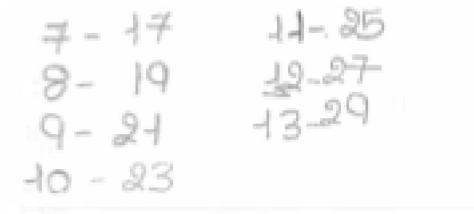



Figura 95. Estratégia aditiva, Grupo 5, Tarefa 5, Questão 5.4.

Os grupos 4 e 9 recorreram à estratégia objeto inteiro, continuando posteriormente a resolução com a estratégia aditiva. Bruno (grupo 4), foi convidado a partilhar a estratégia com a turma, reproduzindo a resolução no quadro (figura 96). O grupo obteve o número de fósforos da 10.ª figura de modo errado ao fazer o dobro do número de fósforos da 5.ª figura. A partir da 10.ª figura seguiu uma estratégia aditiva, mas como o valor da 10.ª figura estava já errado, chegaram a uma conclusão errada para 13.ª figura.

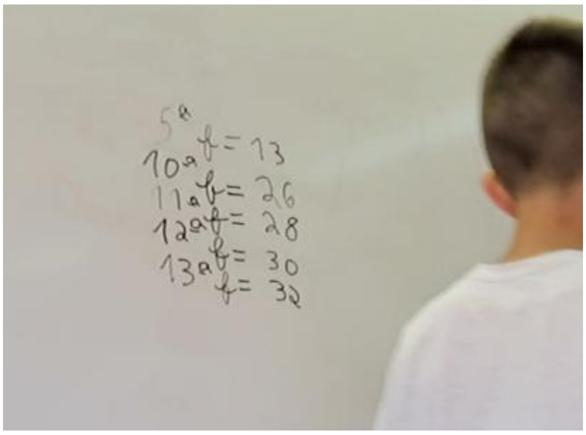



Figura 96. Estratégia objeto inteiro e estratégia aditiva, Grupo 4, Tarefa 5, Questão 5.4.

Da discussão coletiva emergiram várias ideias relacionadas com a tarefa que ajudaram a esclarecer vários grupos e a analisarem criticamente os resultados obtidos.

> Bruno (grupo 4) – Nós vimos que a figura 5 tem 13 fósforos. Depois multiplicámos 5 por 2 e 13 por 2 que dá 26. Depois continuámos a sequência a partir da figura 10 até chegar à figura 13, adicionando sempre mais 2 fósforos.
> Prof. – Parece-vos correto?
> Vários alunos – Não. Não tá certo.
> Rafael (grupo 12) – No exercício anterior [tarefa 4] é que dava certo multiplicar o número da figura por 3 e o número de fósforos também por 3.
> Gonçalo (grupo 1) – A figura 10 não tem 26 fósforos.

João (grupo) – Não podemos multiplicar assim. Podemos multiplicar a figura, mas temos que somar mais 2.
Joana (grupo 3) – E também há outra coisa. O número de fósforos não pode dar par. Não pode dar 32!
Prof. – A figura 10 pode ter 26 fósforos? Como determinamos o número de fósforos da figura 10?
Vários alunos – Então 10+10+3, dá 23 ... 10 de um lado, 10 do outro mais 3 em cima, do triângulo.
Prof. – Nesta sequência, se duplicarmos a figura também duplicamos o número de fósforos da figura?
Vários alunos – Não.
Prof. – Conseguem dar um exemplo? A figura 3 por exemplo. Flor, queres tentar?
Flor (grupo 5) - A figura 3 tem 9 fósforos [olhando para a tabela], logo se duplicasse, teríamos a figura 6 e o dobro de 9 fósforos é 18 ... e a figura 6 tem 15 fósforos... esta regra não dá.
Prof. – Alguém falou que o número de fósforos dá sempre um número ímpar, querem explicar melhor?
Vários alunos – Pois, dá os números ímpares e começa no 5...
Prof. – Qual é então o menor número de fósforos necessário para construir uma figura?
Vários alunos – 5.
Prof. – Bruno, queres dizer alguma coisa? Faz sentido?
Bruno (grupo 4) – Sim ... percebi que se for 2 vezes a figura, não dá para ser 2 vezes o número de fósforos.

No sentido de explorar outras estratégias, Iara foi convidada a partilhar a estratégia do seu grupo com os colegas da turma. Iara (grupo 2), leu a resposta do seu grupo (figura 97), que também evidencia uma estratégia de decomposição dos termos.

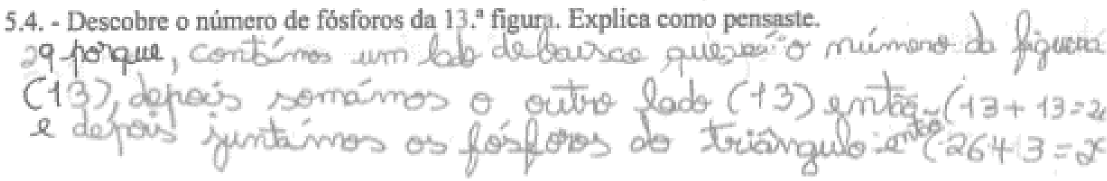

5.4. - Descobre o número de fósforos da 13.ª figura. Explica como pensaste.
29 porque, contámos um lado de baixo que é o número da figura (13), depois somámos o outro lado (+13) então (13+13=2[illegible] e depois juntámos os fósforos do triângulo então (26+3=x

Figura 97. Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2, Tarefa 5, Questão 5.4.

Na questão 5.5. os alunos têm de descobrir o número de fósforos da 35.ª figura. Cinco grupos utilizaram a estratégia aditiva, continuando a sequência até ao termo solicitado, de que é exemplo a resposta do grupo 8 (figura 98).

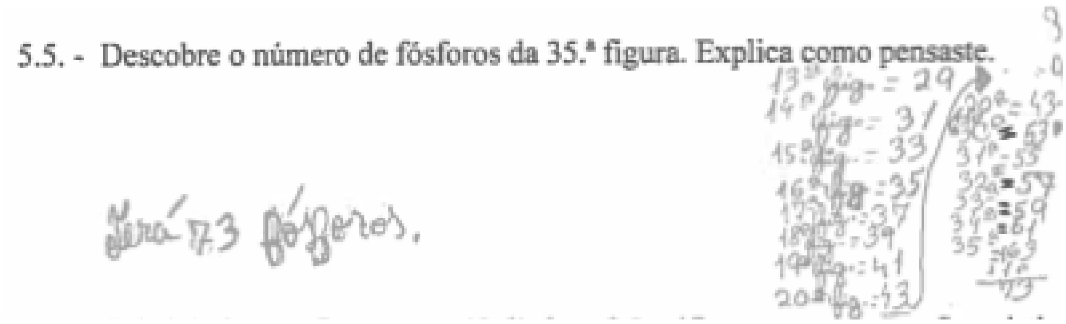



Figura 98. Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 8, Tarefa 5, Questão 5.5.

Com o propósito de partilhar coletivamente outros modos de analisar a situação, ainda numa estratégia aditiva, João Bruno (Grupo 5), reproduziu no quadro a resposta do grupo. Neste caso, não registaram o número de fósforos de todas as figuras até à 35.ª adicionando sucessivamente dois. A partir do número de fósforos da figura 10 obtiveram o número de fósforos da figura 20 adicionando 20 fósforos, valor que resultou de fazerem 10 vezes os dois fósforos que se acrescentam. Do mesmo modo obtiveram a partir da figura 20 o número de fósforos da figura 30. A partir desta adicionaram figura a figura dois fósforos (figura 99).

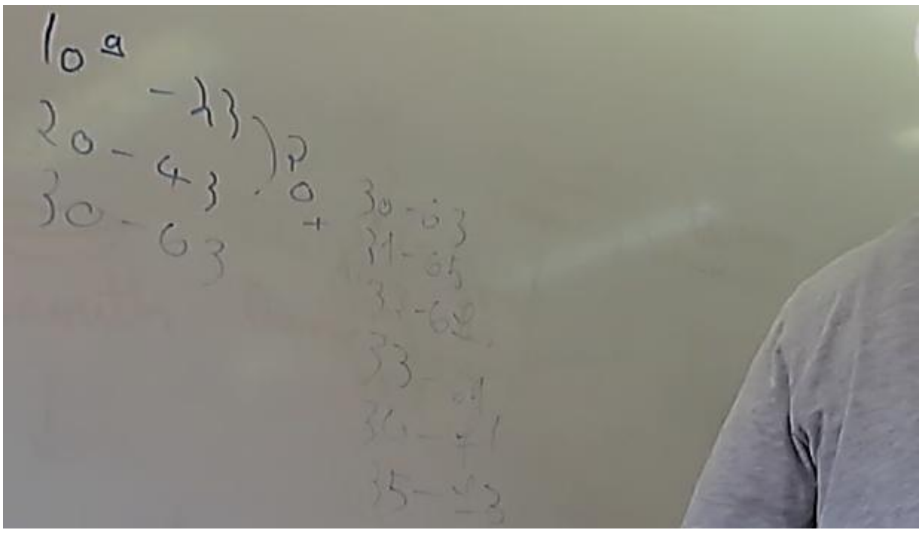



Figura 99. Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 5, Tarefa 5, Questão 5.5.

> João Bruno (grupo 5) – A 10.ª figura tem 23 fósforos, nós vimos que na figura 20 tinha 43, daqui salta mais 20 [do número de fósforos da 10.ª figura para o número de fósforos da 20.ª figura] e aqui salta mais 10 [do número da figura 10 para o número da figura 20]. Então nós fizemos isso com o 30 e deu 63. Então nós depois só fomos aqui à figura 30 que tem 63 , a figura 31 vai ter 65, a figura 32 vai ter 67, ... até ao termo 35.
> Prof. – Perceberam esta estratégia?

> Martim (grupo 10) – Sim. Nós fizemos parecido. Vimos que do número da figura para outra figura aumenta um número, então o número de fósforos dessas duas figuras aumenta o dobro [desse número que aumenta].

Gonçalo (grupo 1) pediu para apresentar aos colegas a estratégia utilizada pelo seu grupo (figura 100). A partir da figura 6 procurou encontrar o valor pelo qual tem de multiplicar o 6 para obter 30 e assim ficar mais próximo da figura pretendida, 35.ª. Assim, multiplicou sucessivamente o número da figura, 6, e o número de fósforos que esta tem, 15, por 2, 3, 4 e 5. Usou uma estratégia objeto inteiro, sem realizar qualquer ajuste no número de fósforos, o que conduziu a uma resposta errada para o número de fósforos da figura 30. Depois somam 75, número de fósforos da 30.ª figura, com 13,número de fósforos da 5.ªfigura, o que aumenta ainda mais o erro por estarem novamente a incluir o grupo de três fósforos que não varia com o número da figura.

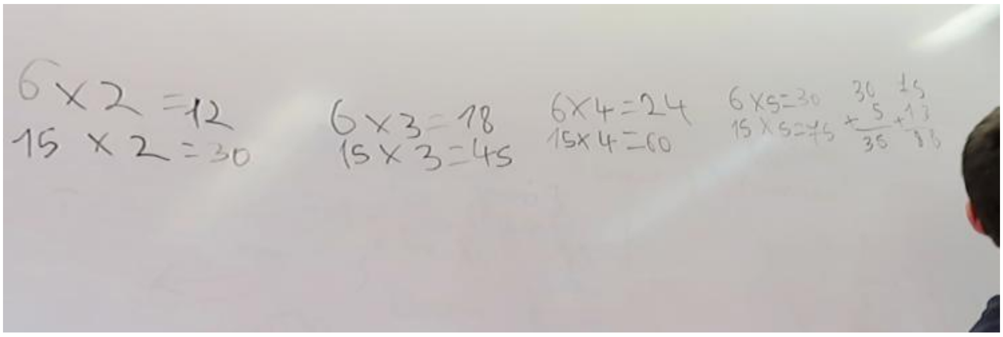



Figura 100. Estratégia Objeto inteiro para os termos distantes, Grupo 1, Tarefa 5, Questão 5.5.

Em relação à estratégia de decomposição dos termos, os grupos 2 e 12 apresentaram respetivamente as seguintes resoluções (figura 101 e 102).

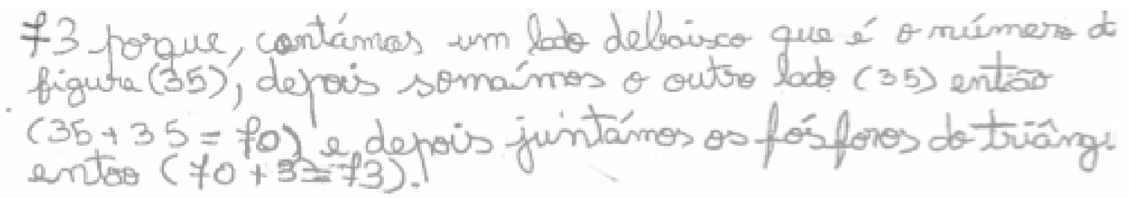



Figura 101. Estratégia decomposição dos termos para os termos distantes, Grupo 2, Tarefa 5, Questão 5.5.


Figura 102. Estratégia decomposição dos termos para os termos distantes, Grupo 12, Tarefa 5, Questão 5.5.

Ambos os grupos identificaram a parte do termo que varia em função da sua ordem e a parte se é invariante, constituída por três fósforos. O grupo 12 apresentou uma expressão numérica, evidenciando que o número da figura surge duas vezes e adicionam também 3.

**Inverter o raciocínio**

Na questão 5.6. os alunos têm de inverter o raciocínio. O número 43 representa agora o total de fósforos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de fósforos. Neste caso, é dado um valor ímpar para que encontrem uma estratégia de resposta que não envolva apenas a verificação de ser par ou ímpar, já que a sequência apenas é constituída por números ímpares. Dez grupos utilizaram a estratégia aditiva. Muitos deles recorreram a dados obtidos nas questões anteriores, como exemplifica a resposta do grupo 5 (figura 103).


Figura 103. Estratégia aditiva no raciocínio inverso, Grupo 5, Tarefa 5, Questão 5.6.

Seis grupos não responderam corretamente a esta questão. Respostas erradas dadas em questões anteriores, condicionaram as respostas à questão 5.6., como se exemplifica na figura 104.

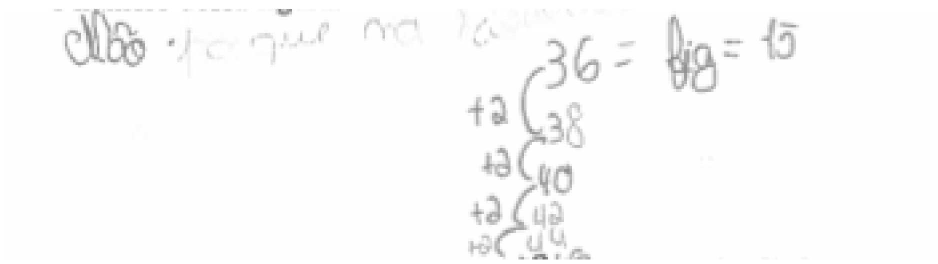
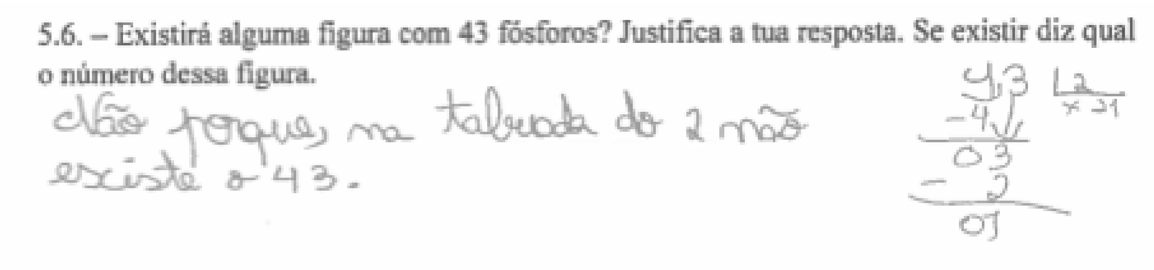



Figura 104. Estratégia aditiva no raciocínio inverso, Grupo 9,  Tarefa 5, Questão 5.6.

João Gil (grupo 2), participou na discussão, escrevendo no quadro (figura 105) a resposta do seu grupo. A sua resposta está errada porque não considera o grupo de três fósforos constante em todas as figuras, centrando-se apenas nos números múltiplos de dois.


**5.6. – Existirá alguma figura com 43 fósforos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.**

Não porque na tabuada do 2 não existe o 43.

Figura 105. Estratégia decomposição dos termos, Grupo 2, Tarefa 5, Questão 5.6.

João Gil (grupo 2) – Já vimos que está errado, a figura é a 20.
Prof. -  Mas explica como fizeram? O que queriam mostrar?
João Gil – Dividimos por 2 e pensámos que tinha de dar resto zero.
Prof. – E o número de fósforos de outras figuras, se dividissem por 2, daria resto zero? Por exemplo a figura 6, tem quantos fósforos?
Vários alunos – 15.
Prof. – E 15 é divisível por 2? Se dividirmos 15 por 2, obtemos resto zero?
João Gil – Não...
Prof. – João, atendendo às vossas respostas anteriores, como fariam? Os lados de baixo, o triângulo... para dar 43.
João Gil – Se tivermos 20 de um lado, 20 do outro, mais 3 do triângulo, dá 43.
Prof. – Para saberem o número da figura, podiam dividir o número de fósforos por 2?
Vários alunos – Não.
Rafael (grupo 12) – Também porque temos o 3 do triângulo que não dá para dividir por 2. Nós respondemos que era a figura 20 porque 20 mais 20 mais 3 é igual a 43.
Prof. – Existe alguma figura com 103 fósforos?
Vários alunos – Sim... a figura 50.

Este momento de discussão coletiva permitiu que um grupo que tinha uma resposta errada percebesse o seu erro, mas que também conseguissem encontrar uma outra estratégia com base em conclusões que já tinha tirado. Além disso, de modo a verificar se a relação entre o número da figura e o número total de fósforos estavam entendidas, analisaram-se outras situações que permitiram aos alunos inverter o raciocínio, tendo por base a estratégia de decomposição dos termos.

### 5.5.3. Generalizações apresentadas pelos alunos

Na questão 5.7. era pedido que os alunos explicassem como poderiam saber o número de fósforos de uma figura da sequência, qualquer que fosse o seu número. Seis grupos utilizaram a estratégia aditiva, cinco grupos utilizaram a estratégia de decomposição dos termos e dois grupos não responderam à questão. Relativamente às generalizações apresentadas, existem nove generalizações aritméticas, uma generalização algébrica de natureza factual/contextual e três generalizações algébricas contextuais

No momento da discussão coletiva, Joana (grupo 3) é convidada a partilhar a estratégia utilizada pelo seu grupo e escreve no quadro uma expressão que associa linguagem natural e símbolos matemáticos e permite, diretamente, relacionar o número da figura com o número de fósforos, evidenciando uma generalização algébrica (figura 106).

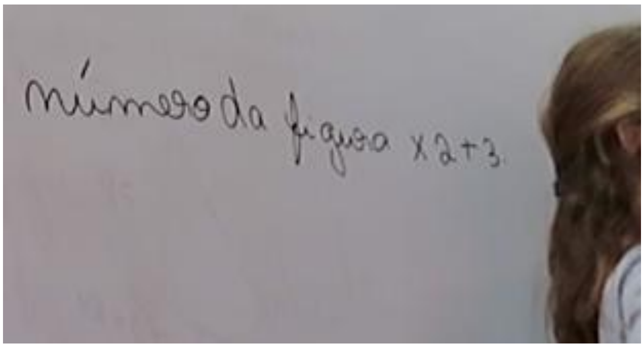



Figura 106. Generalização algébrica contextual. Estratégia decomposição dos termos na generalização, Grupo 3, Tarefa 5, Questão 5.7.

Joana (grupo 3) – Para sabermos o número de fósforos de qualquer figura, multiplicamos o número da figura por 2 e juntamos mais 3.
Prof. – Mais 3? O que é o número 3 que somam?

Vários alunos – É o triângulo, a parte de cima.
Prof. – Dá um exemplo com a figura 500.
Joana – 500 vezes 2 mais 3.
Prof. – Salvador, a figura 75, terá quantos fósforos?
Salvador (grupo 9) – 75 vezes 2 mais 3...

O momento de discussão coletiva permitiu explorar as relações identificadas e que outros alunos as usassem na determinação do número de fósforos de outras figuras da sequência. O grupo 12 também exprime um enunciado que traduz uma generalização de caráter algébrica contextual, associando os vários elementos da expressão às partes do termo que decompõem (figura 107).

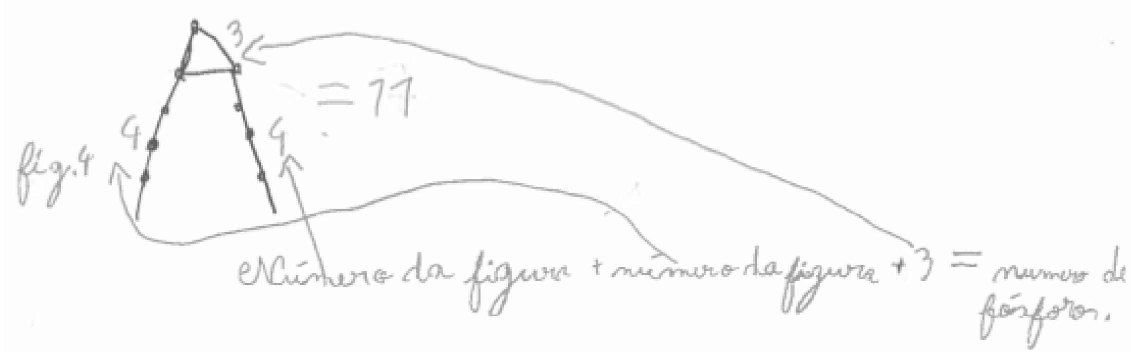



Figura 107. Generalização algébrica contextual. Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 12,Tarefa 5, Questão 5.7.

O grupo 3 evidenciou a multiplicação por 2 enquanto que o grupo 12 usou a repetição de duas parcelas iguais. O grupo 8 escreve duas expressões (figura 108) que permitem determinar o número de fósforos de uma figura, uma que evidencia uma generalização aritmética, baseada na lei de formação e outra trata-se de uma generalização algébrica contextual, usando símbolos e linguagem natural. A primeira expressão só nos permite determinar o número de fósforos da figura seguinte ($n$+1), sabendo o número de fósforos da figura $n$.

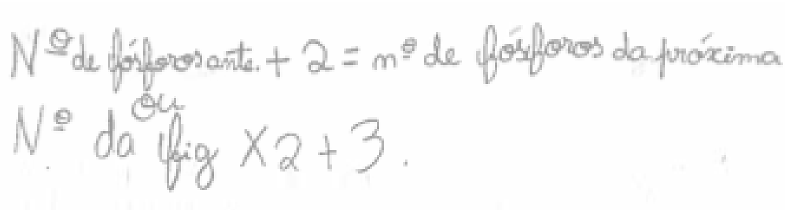



Figura 108. Generalização algébrica contextual. Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 8,Tarefa 5, Questão 5.7.

No fim da discussão relativamente à generalização, Salvador (grupo 9) referiu que descobriu uma "curiosidade" que quer partilhar com os colegas e no quadro registou as relações por meio de um esquema (figura 109).

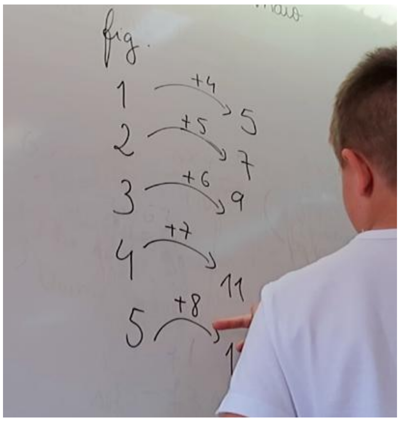



Figura 109. Curiosidade do Salvador, Tarefa 5.

> Salvador (grupo 9) – A figura 1 tem 5 fósforos, aumentou 4; a figura 2 tem sete fósforos, aumentou 5; a figura 3 tem 9 fósforos, aumentou 6, ... é sempre assim.
> Prof. – E o que acontece com os números que somam, os que aumentam [professor aponta para os números em cima das correspondências]?
> Vários alunos – São todos seguidos.
> Rafael (grupo 12) – A partir do 4.
> Prof. – Que resultado obtêm quando subtraem o número que "aumenta" com o número da figura [professor aponta para os valores em questão]?
> Vários alunos – O 3...
> João Gil (grupo 2) – Que podia ser o triângulo lá de cima.

Desta discussão evidencia-se que o número que se adiciona ao número da figura resulta da soma do número da figura com 3, destacando-se assim uma outra abordagem a que os alunos conseguiram dar sentido na sequência de todo o trabalho de exploração já realizado.

### 5.5.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos

Relativamente à questão 5.1., apenas os alunos do grupo 11 não respondem corretamente ao solicitado. Na discussão coletiva, Pedro (grupo 11) referiu que: “de figura para figura, o número de fósforos não aumenta sempre da mesma maneira. Aumenta seis ou aumenta nove”. Esta conclusão não estava de acordo com os valores indicados no registo escrito feito em grupo, como se verifica na figura 110.Procurando saber o que teria acontecido, o grupo revelou que: “no início fizemos bem, mas ouvimos vários grupos a falar do número 6 e do número 9 e fizemos assim”. Ao longo das tarefas este grupo mostrou-se bastante hesitante resolução da tarefa, demorando bastante tempo para responder às questões. Apesar de inicialmente terem efetuado corretamente a representação icónica, os alunos deixaram-se influenciar por observações de colegas, aspeto que levou à alteração da resposta.

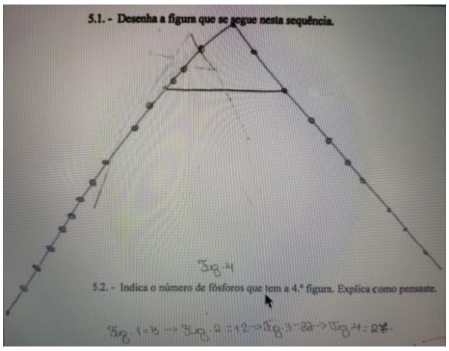



Figura 110. Representação icónica, Grupo 11, Tarefa 5, Questão 5.1.

Esta estratégia influenciou as respostas do grupo às questões seguintes, constituindo um impedimento à reflexão sobre a utilização de outras estratégias e procedimentos. Outro aspeto a realçar prende-se com o rigor das diversas representações, aspeto que influencia a estratégia de representação e contagem. Alguns grupos, nas diversas representações, não distinguiram devidamente os diferentes segmentos de reta, que usaram para representara os fósforos, aspeto que condicionou algumas contagens. Oito grupos fizeram representações ativas para representar os primeiros termos da sequência. Alguns alunos referiram que a utilização dos fósforos foi um foco de distração para alguns colegas e que estas representações não foram importantes na resolução das tarefas, pois “teria sido mais fácil e rápido se tivéssemos logo feito os desenhos” (Rafael, grupo 12). Para determinar os termos distantes alguns alunos utilizam a estratégia objeto inteiro, usando uma relação de proporcionalidade entre o número da figura e o número de fósforos, que não existe, continuando depois a sequência através da estratégia aditiva, o que os conduziu a respostas erradas, que por sua vez condicionaram as respostas a outras questões. Quando confrontados relativamente à estratégia utilizada, estes alunos referiram que: “como dava para fazer assim nas tarefas anteriores, também fizemos nesta.” (Mariana, grupo 4, figura 111).


Figura 111. Estratégia objeto inteiro e aditiva. Grupo 4. Tarefa 5. Questão 5.4.

Na questão em que os alunos têm de inverter o raciocínio, doze alunos não responderam corretamente. Verifica-se que soluções dadas em questões anteriores influenciaram as estratégias utilizadas, como se exemplifica nas respostas dadas pelos alunos do grupo 13 nas questões 5.5. e 5.6. (Figura 112). O grupo usou uma estratégia de objeto inteiro que gerou conclusões erradas.

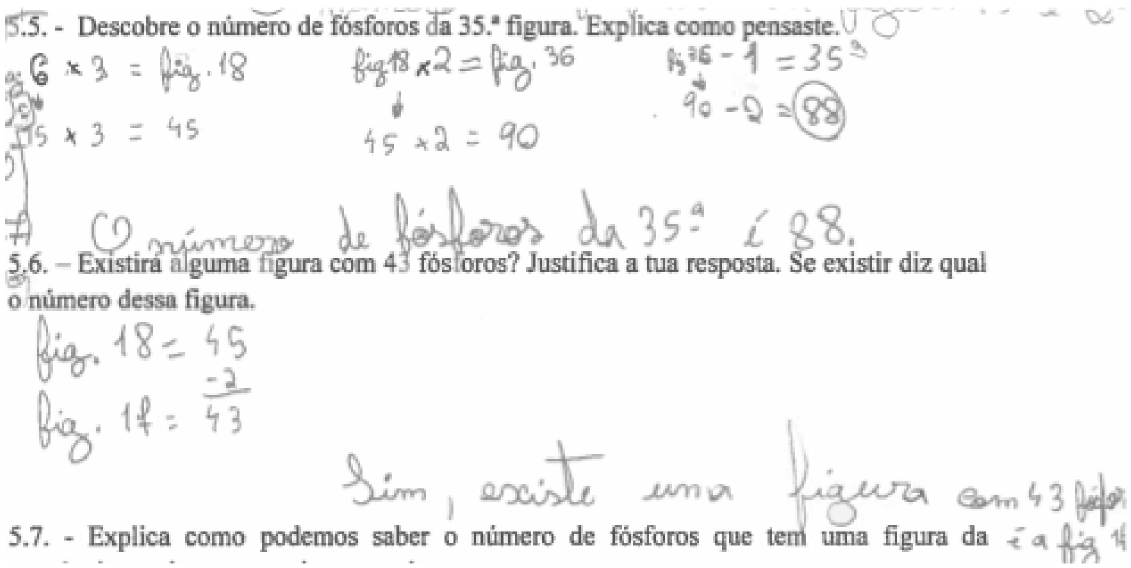



Figura 112. Resolução às questões 5.5. e 5.6., Grupo 13, Tarefa 5.

Na questão 5.7. em que é pedido que os alunos expliquem como se pode saber o número de fósforos de uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número, as produções escritas de sete grupos sugerem que estes alunos apresentam uma generalização aritmética, fruto da manifesta utilização e replicação dos dados da tabela, manifestando, portanto dificuldade em procurar uma outra estratégia e chegar à expressão de uma generalização algébrica.

### 5.5.5. Reflexão

Todos os alunos envolveram-se ativamente na exploração da tarefa, cooperando e comunicando entre si. A discussão oral em grande grupo teve uma importância significativa na apresentação e troca de estratégias e na manifestação de dificuldades, nomeadamente no que se refere às estratégias, natureza da generalização e justificação que apresentam. A estratégia objeto inteiro, utilizada incorretamente por vários alunos nas diversas questões, foi analisada e explorada na discussão em grande grupo. O seu uso decorre da procura de utilização de estratégias que nas duas tarefas anteriores tinham sido usadas. A discussão parece ter contribuído para a identificação de estratégias erróneas em situações específicas inerentes à tarefa. Durante o trabalho autónomo verifiquei que dezasseis alunos utilizaram os fósforos para representar as figuras seguintes da sequência, porém, na discussão coletiva, alguns alunos afirmaram que despenderam bastante tempo nestas "construções" e que teria sido mais fácil fazer as representações nos registos destinados para o efeito. Os alunos identificaram que, ao longo da sequência, entre termos consecutivos, mantém-se uma regularidade. É maior o número de alunos a registar no próprio enunciado o número de fósforos de cada termo da sequência, identificando uma regra de formação e sistematizando a informação dos dados. Na questão 5.4., dezoito alunos utilizam a estratégia aditiva e destes, catorze optam por continuar a tabela até ao termo solicitado. Na discussão coletiva, diversos alunos revelam que é mais fácil "continuar a tabela", não manifestando qualquer preocupação em utilizar outra estratégia. Joana (grupo 3) diz que: "não é preciso pensar muito a fazer com a tabela". Nas questões seguintes, mantém-se o recurso à construção da tabela e consequente utilização da estratégia aditiva como forma de validar as respostas Também nesta tarefa, verifiquei que alguns alunos construíram e continuaram a tabela até aos temos solicitados. A determinação do número de objetos de cada termos foi, mais uma vez, feita através de estratégia "aditiva". Deste modo, penso que a construção de tabelas pode promover a utilização da estratégia "aditiva". Contudo, no momento de discussão coletiva, facilmente alguns alunos expressam oralmente uma regra que permite determinar o número de fósforos em função do número da figura, evidenciando uma generalização algébrica. Este aspeto sugere que apesar da utilização massiva da estratégia aditiva e da apresentação de uma generalização aritmética nos enunciados escritos, no momento de discussão em turma, facilmente conseguem apresentar uma generalização de natureza algébrica. Saliento também a utilização sistemática da estratégia “objeto inteiro” por parte de alguns alunos, condicionando o sucesso na obtenção de respostas corretas. As produções escritas sugerem que os mesmos têm a perceção que esta estratégia pode ser utilizada corretamente em qualquer estrutura matemática, aspeto trabalhado, explorado e debelado na discussão coletiva.

Em relação às diversas representações, como já foi referido o uso da tabela condicionou a estratégia a usar nas questões seguintes em alguns grupos. Alguns alunos desenham os termos da sequência, usando assim uma representação externa icónica. Os alunos usam a linguagem natural para comunicar e justificar os seus raciocínios e estratégias. A representação externa simbólica também é visível, sobretudo quando os alunos expressam as generalizações algébricas, o que se evidencia com muito positivo para o desenvolvimento do seu pensamento algébrico. A representação ativa revelou ser, segundo os alunos, dispensável. Segundo eles, para além de um foco de distração, gastaram muito tempo na construção das sequências. Faltou aprofundar esta questão para perceber se essa construção contribuiu ou não para a definição de estratégias nas questões seguintes da tarefa. A tabela T6 em anexo, sistematiza as estratégias e generalizações utilizadas e aplicadas pelos alunos ao longo da tarefa.

## 5.6.Sequência letras “L” que são formadas por círculos (Tarefa 6)

### 5.6.1. Características da tarefa

Na sequência crescente desta tarefa, cada figura recorre a arranjos visuais identificáveis coma letra “L”. São apresentados os três primeiros termos da sequência pictórica que são formados por círculos e cuja respetiva constituição depende da sua ordem (Figura 113). Os termos têm uma parte invariante, formada por três círculos, e uma parte que varia em função da ordem. Nesta tarefa, não foram disponibilizados quaisquer materiais manipuláveis, o que impossibilita a utilização de representações ativas.

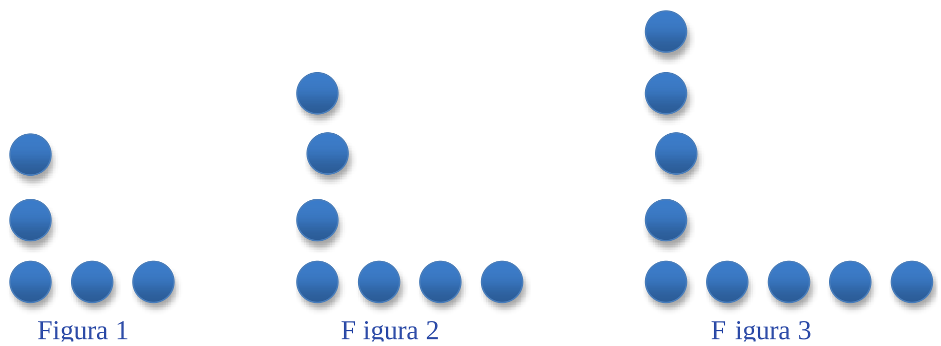



Figura 113. Três primeiros termos da sequência pictórica, Tarefa 6.

### 5.6.2. Estratégias utilizadas pelos alunos

**Termos próximos**

Na primeira questão todos os grupos desenharam corretamente a figura 4. Cinco grupos contaram e registaram o número de círculos de cada um dos termos da sequência. Para estes grupos, os registos permitiram "perceber o que acontece quando se passa de figura para figura" (Flor, grupo 5).

Nessa primeira análise, alguns grupos começaram já a analisar as partes dos termos pictóricos para as relacionar com o número da figura, tal como assinalou o grupo 2 (Figura 114) e foi descrito pelo grupo:

> Vimos que os debaixo [horizontal] são mais 2 círculos do que o número da figura e depois somamos os da vertical que são sempre mais 1 do que o número da figura. Por exemplo, vimos que a figura 4 tem 6 debaixo, que é mais 2 círculos do que o número da figura e 5 círculos na vertical, que é mais 1 do que o número da figura, 6+5 dá 11. (João, grupo 2)

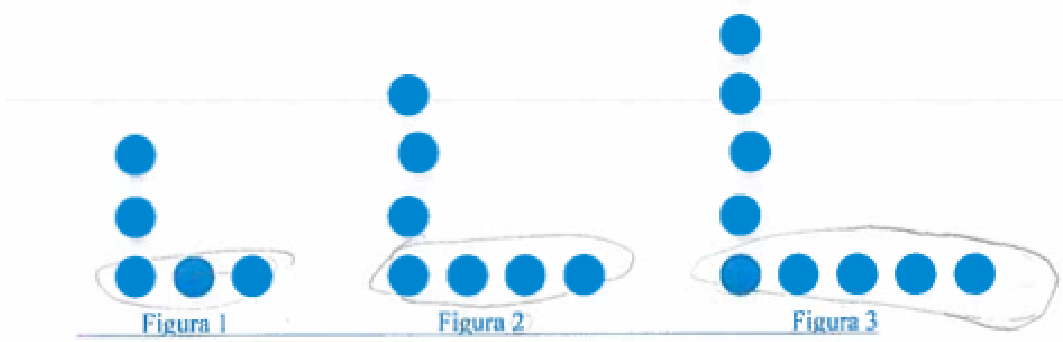



Figura 114. Registo da lei de formação, Grupo 2, Tarefa 6, Questão 6.1

Na questão 6.2. os alunos têm de indicar o número de círculos da 4.ª figura. Sete grupos utilizaram a estratégia de representação e contagem. Os elementos destes grupos referiram que contaram o número de círculos da figura que desenharam na questão 6.1.

Um grupo utilizou a estratégia aditiva (figura 115), referindo o que muda entre figuras consecutivas.

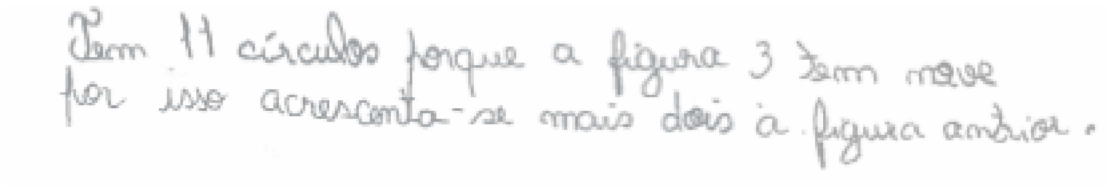

Tem 11 círculos porque a figura 3 tem nove por isso acrescenta-se mais dois à figura antrior.

Figura 115. Estratégia aditiva, Grupo 1, Tarefa 6, Questão 6.2.

Quatro grupos utilizaram a estratégia de decomposição dos termos. Flor (grupo 5), é convidada a participar na discussão, tendo desenhado no quadro a representação seguinte (figura 116). A sua representação evidencia a identificação do conjunto de três círculos que é invariante nos termos pictóricos, que concretiza para a 4.ª figura.

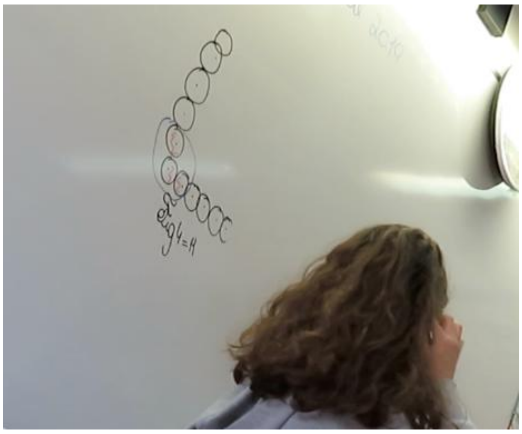


Figura 116. Registo da lei de formação, Estratégia decomposição dos termos, Grupo 5 Tarefa 6, Questão 6.2.

O grupo 5 identificou a parte que se mantém constante, formada por 3 círculos, explicando no momento de discussão que:

> De figura para figura mantém-se sempre estes três [apontando para o os três círculos assinalados no quadro] e muda o número de círculos na vertical e na horizontal, sem contar com estes três. O número da figura é igual ao número de círculos da vertical ou da horizontal. (Flor, grupo 5)

**Termos distantes**

Na questão 6.3., os alunos têm de indicar o número de círculos de uma figura distante, neste caso a 9.ª figura da sequência. Excetuando os grupos 9 e 11, todos os outros responderam corretamente à questão, sendo que seis recorreram à estratégia aditiva, continuando a tabela até ao termo solicitado, de que é exemplo a resolução do grupo 4 (figura 117).

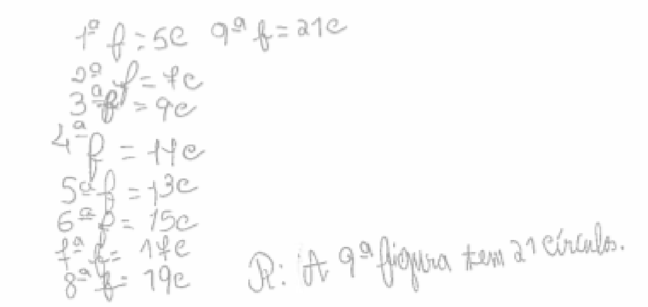



Figura 117. Estratégia aditiva, Grupo 4, Tarefa 6, Questão 6.3.

O grupo 9 recorreu à estratégia de representação e contagem (figura 118).Contudo, os elementos do grupo não desenharam corretamente a representação referente à figura 9 da sequência.

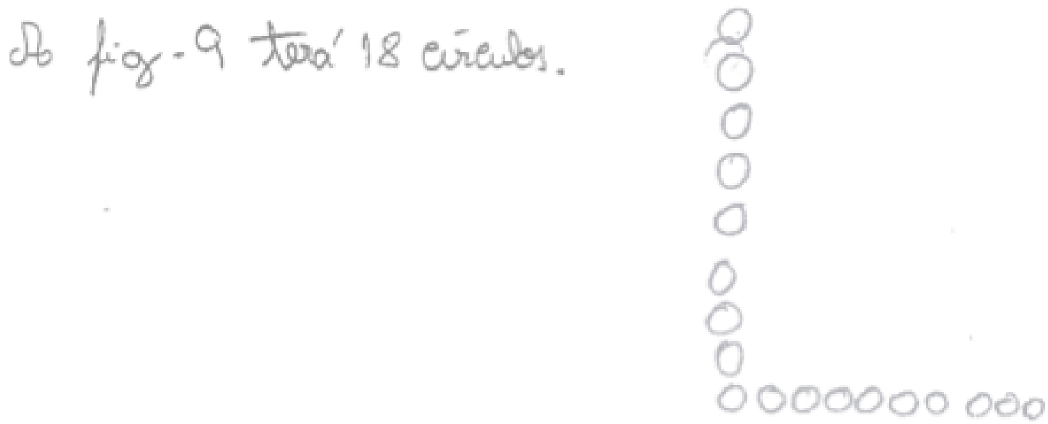



Figura 118. Estratégia representação e contagem, Grupo 9, Tarefa 6, Questão 6.3.

Cinco dos seis grupos que utilizaram a estratégia de decomposição dos termos, responderam corretamente a esta questão. Convidada a participar na discussão, Giovanna (grupo 8), fez a representação icónica seguinte no quadro (figura 119), relativa à figura 4 da sequência.

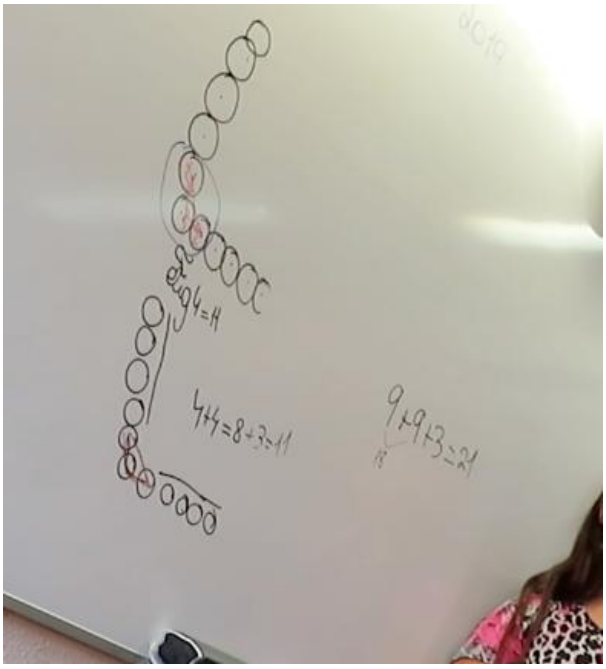



Figura 119. Estratégia decomposição dos termos, Grupo 8, Tarefa 6, Questão 6.3.

Com esta resolução explicaram aos colegas que identificaram uma parte que não depende do número da figura e que há outra que varia em função desse valor, tal como Giovanna explica:

> "Vimos que estes 3 círculos se mantêm ao longo da sequência (apontando para os 3 círculos riscados a vermelho) e como é a figura 4, temos mais 4 círculos na vertical e 4 círculos na horizontal ... então temos 4+4+3 que dá 11. A figura 9 (da sequência) tem 9+9+3 que dá 21." (Giovanna, Grupo 8)

Alexandre (grupo 7), pediu para explicar a estratégia utilizada pelo seu grupo e reproduziu no quadro o registo efetuado na ficha de trabalho (figura 120). Ao número da figura, 9, adiciona 12. Esse 12, tal como explica resulta de adicionar 3 com número da figura.

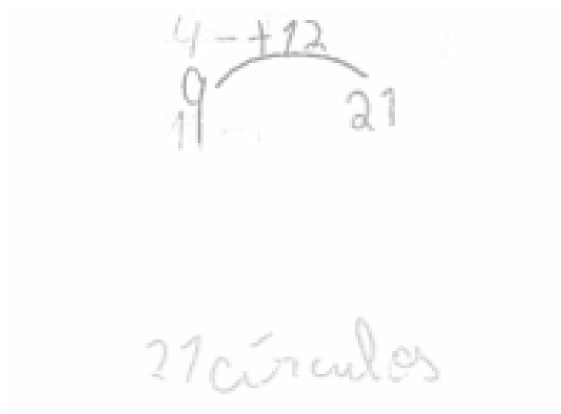


Figura 120. Estratégia decomposição dos termos, Grupo 7, Tarefa 6, Questão 6.3.

Prof. – Alexandre não expliques ainda. Gonçalo, como aparece aquele “mais 12”?
Gonçalo - ...
Prof. – Alguém quer dar uma sugestão? ... Alexandre, por favor.
Alexandre (grupo 7) – A figura 9 tem 9 círculos na horizontal mais 9 círculos na vertical mais 3, dá 21.
Prof. – Mas como aparece o 12?
Alexandre – É do 9+3 ... temos a figura 9, depois mais outra vez mais 9 e mais 3... o 12 é de um 9+3.
Gonçalo (grupo 1) – Já percebi, o 12 é igual a 9+3.
Prof. – Como seria para a figura 10? Quantos círculos teria a figura 10, usando esta estratégia?
Gonçalo (grupo1) - ... 10+13 dá 23.

Na questão 6.4. os alunos têm de descobrir o número de fósforos da 20.ª figura. Sete grupos utilizaram a estratégia aditiva, continuando a sequência até ao termo solicitado, como exemplifica a resolução do grupo 3 (figura 121) que destaca a adição sucessiva de 2.

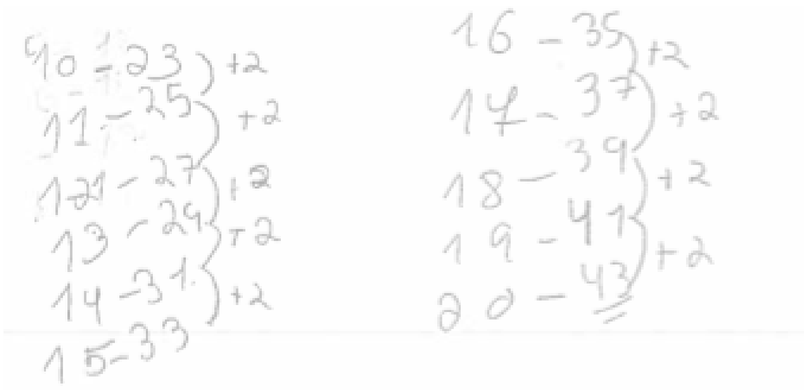


Figura121. Estratégia aditiva para os termos distantes, Grupo 3,Tarefa 6, Questão 6.4.

Seis grupos utilizaram a estratégia de decomposição dos termos. Com o propósito de partilhar coletivamente outras estratégias, João Gil (Grupo 2) reproduziu no quadro o seguinte enunciado (figura 122), que traduz uma estratégia de decomposição dos termos.

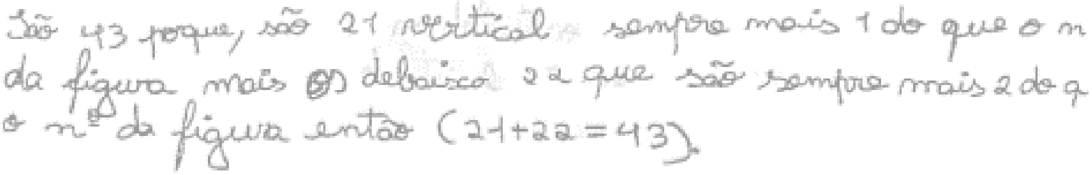



Figura 122. Estratégia decomposição dos termos para os termos distantes, Grupo 2, Tarefa 6, Questão 6.4.

**Inverter o raciocínio**

Na questão 6.5. os alunos têm de inverter o raciocínio. O número 52 representa agora o total de círculos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de círculos. Cinco grupos utilizaram a estratégia aditiva, muitos deles recorreram a dados obtidos nas questões anteriores, como exemplifica a resolução do grupo 10 (figura 123).

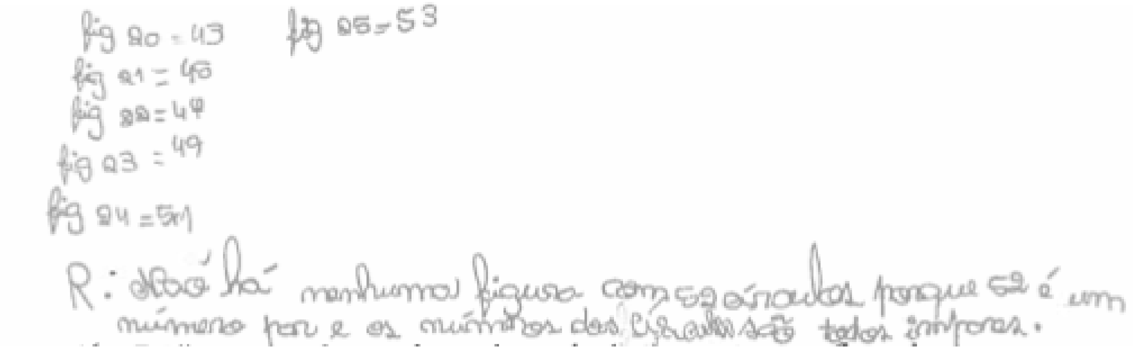



Figura 123. Estratégia aditiva no raciocínio inverso, Grupo 10, Tarefa 6, Questão 6.5.

Seis grupos recorreram à sequência e verificaram que o número de círculos de qualquer figura da sequência nunca é um número par.

Ainda relativamente à questão 6.5., João Bruno (grupo 5) é convidado a partilhar a estratégia utilizada pelo seu grupo, reproduzindo no quadro a resposta dada no trabalho de pares (figura 124). Começaram por tentar obter um valor aproximado do número da figura, caso ela existisse, tendo obtido o número 23. Com base nesse valor aplicaram a regra direta para saber o número de círculos dessa figura, valor que ainda não se aproximava do 52. Assim, fizeram o mesmo processo com 24, tendo obtido 51 círculos. Oralmente explicam o mesmo processo para a 25.ª figura. Existindo uma figura, a 24.ª, com 51 círculos, e a 25.ª com 53 círculos, concluíram que nenhuma poderia ter 52 círculos.

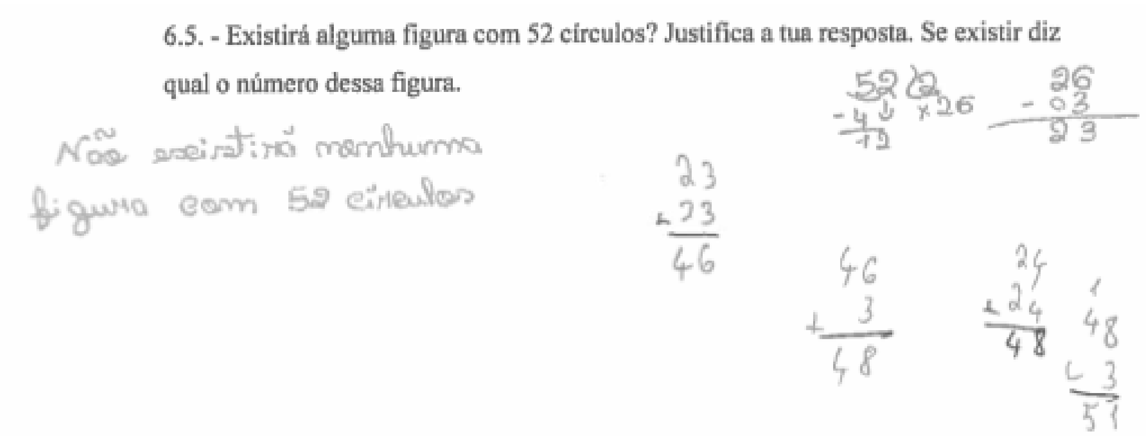



Figura 124. Estratégia dedecomposição dos termos no raciocínio inverso, Grupo 5, Tarefa 6, Questão 6.5.

João Bruno (grupo 5) - Vimos que a figura 23 tem 48 fósforos.
Prof. – 48?
João Bruno – 49... A figura 24 tem 51 e a figura 25 teria 53, logo não há nenhuma figura com 52 círculos.

### 5.6.3. Generalizações apresentadas pelos alunos

Na questão 6.6. é pedido que os alunos expliquem como podem determinar o número de círculos de uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número. Onze grupos utilizaram a estratégia de “decomposição dos termos” grupo utiliza a estratégia e dois grupos não respondem à questão. Relativamente às generalizações apresentadas, dois grupos apresentam generalizações algébricas factuais, nove grupos apresentam generalizações algébricas de natureza contextual e um grupo apresenta simultaneamente uma generalização de natureza factual e contextual.

O grupo 10 apresentou uma resolução que traduz uma generalização de caráter algébrico factual (figura 125). Concretizaram a relação que estabelecem para o termo de ordem 30.

30 . fig. 30 = 63
x 2
60+3 = 63

Figura 125. Generalização factual. Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 10, Tarefa 6, Questão 6.6.

No momento da discussão coletiva, o grupo 5 partilhou a estratégia utilizada (figura 126), verificando-se o uso da linguagem natural para expressar a relação direta que estabelece com o número da figura.

Multiplicar o número da figura por 2 e acrescentar mais 3.

Figura 126. Generalização algébrica contextual. Estratégia decomposição dos termos na generalização, Grupo 5, Tarefa 6, Questão 6.6.

A resolução do grupo 8 apresenta uma generalização algébrica contextual em que é utilizada a linguagem natural e simbólica, com uso do sinal de =, os símbolos de operação + e x e algarismos (figura 127).

Nº de pessoas é = ao nº da figura x 2 + 3.

Figura 127. Generalização contextual. Estratégia decomposição dos termos para a generalização, Grupo 8,Tarefa 6, Questão 6.6.

### 5.6.4. Dificuldades apresentadas pelos alunos

Como já foi referido, na questão 6.3., o grupo 9 fez a representação icónica. Contudo, representou-a incorretamente, aspeto que influenciou a contagem do número de círculos. Também nesta questão, o grupo 11 não conseguiu estabelecer a relação correta, fazendo apenas a multiplicação do número da figura por 2 (figura 128).

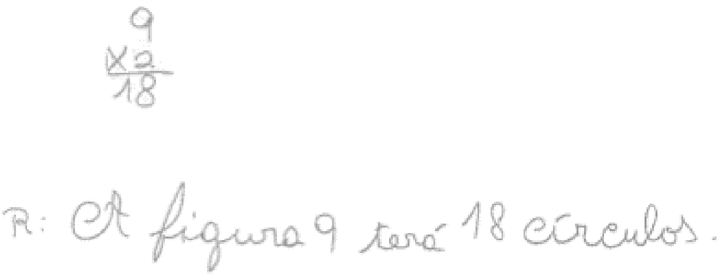



Figura 128. Estratégia decomposição dos termos, Grupo 11, Tarefa 6, questão 6.3.

Na discussão coletiva, esses alunos referiram que: "esquecemo-nos de juntar os três círculos que são aquele triângulo que está sempre fixo" (Pedro, grupo 11).

Na questão 6.4., o grupo do Pedro procedeu do mesmo modo, esquecendo-se de adicionar os três círculos. Sete grupos utilizaram a estratégia aditiva, prolongando a representação da sequência até ao termo solicitado. Na discussão coletiva, quando confrontados com o facto de utilizarem frequentemente a mesma estratégia na resolução das diversas questões, alguns alunos referiram ser mais fácil continuar a sequência, outros destacaram que, nesta sequência, sentiam uma maior confiança quando escreviam todos os termos e respetivos número de círculos. Da discussão coletiva emergiu a ideia de que alguns alunos não se sentiam confiantes em utilizar outras estratégias na resolução desta questão.

Para justificar que não existe uma figura na sequência com 52 círculos, doze alunos identificaram uma regularidade, que se exemplifica na resposta dada pelo grupo 13 (figura 129). Estes alunos reconheceram que o número de círculos de cada termo da sequência é sempre um número ímpar. Contudo não conseguiram exprimir uma outra estratégia que outras questões evidenciassem uma generalização de natureza algébrica.

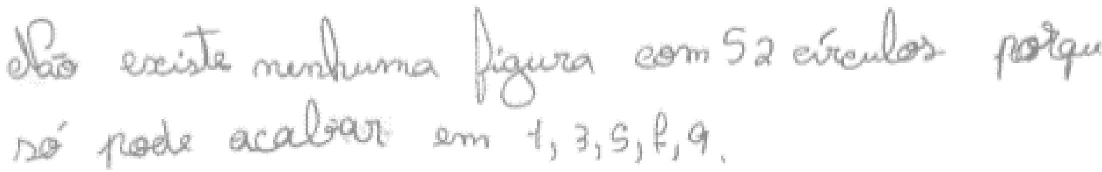



Figura 129. Identificação de números ímpares dos termos da sequência. Grupo 13, Tarefa 6, questão 6.5.

Todavia, na discussão coletiva, alguns destes alunos foram convidados a refletir sobre a regra direta da sequência, identificando a estrutura que se mantém constante em todos os termos e os elementos que se alteram no termo, em função do número da figura. Através da estratégia de decomposição dos termos, verbalizaram e representaram simbolicamente algumas ideias, como expressa o comentário do João Bruno (grupo 5): “dá sempre ímpar porque de figura para figura aumenta sempre 2, que é par. Aquele triângulo pequeno [com três círculos] é que faz que seja sempre ímpar”. Cinco grupos, mais uma vez, continuaram a sequência até ao termo solicitado, parecendo revelar dificuldades em utilizar outras estratégias.

Relativamente à última questão, a maioria dos alunos não manifestou dificuldades em indicar uma regra que permita saber o número de círculos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número. O grupo 11 apenas reconheceu a existência da multiplicação, pois considerou que para determinar o número de círculos de qualquer figura basta calcular o seu dobro, esquecendo-se da estrutura composta por três círculos. O grupo 13 não expressou uma generalização algébrica, referindo apenas o algarismo que tem de estar na ordem das unidades do número de círculos, ou seja, que este é ímpar (figura 130). Esta resolução sugere que o grupo não percebeu que era solicitado.


Figura 130. Estratégia de generalização. Grupo 13, Tarefa 6, Questão 6.6.

### 5.6.5. Reflexão

Nesta última tarefa, verifiquei uma participação ativa por parte de todos os alunos na sua exploração. A discussão oral em grande grupo voltou a ter um papel determinante na apresentação e troca de estratégias e na exploração de situações de dificuldade ou de erro dos alunos, contribuindo para o envolvimento dos alunos na exploração de diferentes estratégias, na compreensão de diferentes modos de expressar a generalização, e promovendo a justificação de ideias, aspetos fundamentais no âmbito e objetivos do estudo. Em relação à tarefa anterior, nas questões em que os alunos tinham de determinar termos distantes, os resultados mostram que nesta tarefa existe uma maior utilização da estratégia de decomposição dos termos, aspeto que contribui para a generalização algébrica. No momento de discussão coletiva, falam sobre as estratégias utilizadas pelos colegas e facilmente expressam, oralmente ou por escrito, uma regra que permite calcular o número de círculos de qualquer figura, aspeto que se traduz nos resultados verificados na última questão da tarefa 6. Inevitavelmente, e atendendo ao facto da estrutura matemática da sequência desta tarefa ser igual à da tarefa anterior, é pertinente comparar os resultados obtidos no que se refere à apresentação de generalizações. Assim, nesta tarefa vinte alunos apresentaram uma generalização de natureza algébrica, enquanto que na mesma questão da tarefa anterior, apenas oito alunos apresentaram alguma categoria de generalização algébrica. Este aspeto está relacionado com o facto de a generalização algébrica ter sido alvo de discussão coletiva na tarefa anterior, consequência da forma em como se conduziu a tarefa exploratória, e da maioria dos alunos ter relacionado e identificado a mesma estrutura matemática.

Em relação às diversas representações, a sistematização e organização dos dados em estruturas similares a tabelas foram, uma vez mais, usadas por alguns alunos, sendo que esses alunos mantiveram a generalização aritmética. Desenharam também os termos da sequência, usando assim uma representação icónica. Usam a linguagem natural para comunicar e justificar os seus raciocínios e estratégias. A representação matemática simbólica, aliada à linguagem natural, foi bastante usada, sobretudo quando os alunos recorreram a expressões numéricas e a equações. A tabela T7 em anexo, sistematiza as estratégias e generalizações utilizadas e aplicadas pelos alunos ao longo da tarefa.

# CAPÍTULO 6

# CONCLUSÃO

Neste capítulo apresento uma síntese do presente estudo e uma súmula conclusiva dos principais resultados, dando especial relevo às representações, estratégias e categorias de generalização adotadas pelos alunos durante a realização das tarefas envolvendo sequências pictóricas crescentes, bem como às dificuldades que manifestaram aquando da experiência de ensino. De seguida, apresento uma reflexão sobre possíveis contributos e recomendações para a construção de tarefas para a sala de aula. Depois, atendendo ao contexto e dinâmica da sala de aula e aos fatores externos que condicionaram as condições de trabalho, faço algumas referências às limitações do estudo e às dificuldades por mim sentidas. Por último, a reflexão final, compreende uma sistematização das principais ideias decorrentes do estudo no sentido de dar resposta às questões orientadoras da investigação.

## 6.1. **Síntese do estudo**

Kieran (2007) considera que a Álgebra é, sobretudo, um modo de pensar, um método para ver e expressar relações e que proporciona instrumentos poderosos para entender o mundo e que, por isso, a sua aprendizagem deve ser um dos objetivos a privilegiar em todos os níveis de ensino. O NCTM (2007), considera a Álgebra como um tema transversal, evidenciando o seu potencial no estabelecimento de relações com outros temas matemáticos. Em Portugal, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), realça que é fundamental desenvolver o pensamento algébrico desde os anos iniciais de escolaridade, aspeto que envolve a realização de atividades de observação e construção de sequências numéricas e/ou pictóricas, a identificação e descrição de relações e a generalização de regularidades. Ponte (2017) refere que, nos últimos anos, emergiu a perspetiva que o pensamento algébrico poder desenvolver-se desde o início da escolaridade, mesmo sem o uso de uma de uma linguagem simbólica e que, nesse campo, as sequências assumem grande destaque. Ponte, Branco e Matos (2009) consideram quatro tipos de sequências: pictóricas, numéricas, repetitivas e crescentes. Para estes autores, nos primeiros anos de escolaridade, é importante que os alunos elaborem sequências numéricas e pictóricas de acordo com uma dada lei de formação e as generalizem usando linguagem natural. Ponte e Velez (2011b) referem que a realização de tarefas com sequências pictóricas contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico. As tarefas sugeridas nesta experiência enquadram-se no que Ponte (2017), propõe relativamente às questões que devem acompanhar o estudo das diversas sequências, nomeadamente: "encontrar o objeto seguinte, um objeto distante, uma lei geral de formação ou decidir se um certo objeto integra ou não a sequência" (p.27).

Neste estudo, para além da aplicação de tarefas que visam a promoção da capacidade de generalização, procuro compreender como é que alunos de 4.º ano analisam sequências pictóricas, focando nas estratégias que usam e nas generalizações que apresentam em tarefas envolvendo sequências crescentes com uma estrutura Matemática linear, mas com diferentes disposições pictóricas. Concretamente, pretendo dar resposta às seguintes questões:

i) Que estratégias de raciocínio usam os alunos para responder a questões de diferentes graus de dificuldade, na realização de tarefas que envolvem sequências pictóricas crescentes?

ii) Que categorias de generalização apresentam os alunos nas respostas às diferentes questões que envolvem generalizações?

Nestas questões, emergem também representações e dificuldades dos alunos. Assim, o quadro teórico deste projeto, para além da abordagem relativa à importância da exploração de sequências pictóricas como forma de desenvolver o pensamento algébrico, considera também a generalização, as representações matemáticas, as estratégias utilizadas e as dificuldades dos alunos na exploração deste tipo de sequências.Com o propósito de procurar regularidades, determinar termos próximos e distantes, verificar se um determinado objeto integra a sequência, bem como identificar regras de formação, os alunos realizaram seis tarefas matemáticas de natureza essencialmente exploratória tendo em vista desenvolver as capacidades de representação e generalização (Ponte, 2005). Para Canavarro (2011), através do ensino exploratório da Matemática, "os alunos têm a possibilidade de ver os conhecimentos e procedimentos matemáticos surgir com significado e, simultaneamente, de desenvolver capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação Matemática (p.11).

Adotei uma abordagem própria de uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), cujo design assenta numa experiência de ensino. Os instrumentos de recolha de dados utilizados foram a observação das aulas, o diário de bordo, a transcrição da gravação das aulas em áudio e vídeo e os documentos escritos produzidos pelos alunos durante a realização das tarefas.

Nesta experiência de ensino dou especial atenção às tarefas propostas e ao seu encadeamento. Barbosa e Borralho (2011) referem que a escolha das tarefas a propor e o modo como as articulam assume um cariz de destaque no trabalho do professor. É essencial que este consiga envolver os alunos em tarefas de cunho exploratório e investigativo, contribuindo para o desenvolvimento das capacidades relacionadas com o pensamento algébrico (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; NCTM, 2007). As questões apresentadas na exploração das tarefas é característico das tarefas de cunho exploratório pois, para além de orientar o trabalho dos alunos, promove uma exploração mais aprofundada das sequências e, consequentemente, desenvolve a capacidade de abstração, o estabelecimento de generalizações e, naturalmente, a descoberta do termo geral. Uma aula exploratória típica é geralmente estruturada em três ou quatro fases, a fase de “lançamento” da tarefa, a fase de “exploração” pelos alunos e a fase de “discussão e sintetize” (Canavarro,2011; Stein et al.,2008). Borralho e Barbosa (2009) realçam que o trabalho com tarefas exploratórias permite ao aluno ter a oportunidade de explorar padrões e relações numéricas com a possibilidade de explicitar as suas ideias, discutir e refletir sobre elas. A realização das tarefas proporciona dois momentos principais na sala de aula, o primeiro referente ao trabalho autónomo em pares e o segundo à discussão coletiva em grupo-turma, sendo este segundo momento essencial para validar, formalizar e sintetizar os resultados obtidos pelos alunos (Morais, 2012). Segundo o NCTM (1992) o trabalho em grupo permite à maioria dos alunos tornar-se mais ativos mas suas aprendizagens, permitindo-lhes maneiras diferentes de descobrir respostas para as questões das tarefas e falar com os seus colegas sobre elas. Durante o trabalho autónomo em pares, circulei pela sala de aula e de grupo em grupo, ouvindo e observando, ideia defendida por Stein e Smith (1998), com o objetivo de entender a forma como os alunos estão a investir e a abordar os aspetos matemáticos mais prementes que iam surgindo. Tal como refere Canavarro (2011), pretendi apropriar-me das estratégias e resoluções que os alunos estavam a realizar, com o objetivo de “avaliar o seu potencial para a aprendizagem Matemática a promover na turma” (p.13). Perante solicitações de diversos grupos que não entendiam “o que era para fazer”, resisti a explicitar algum procedimento, preferindo questioná-los com a expectativa de os fazer pensar, ideia defendida por Canavarro (2011). Nos minutos finais do trabalho autónomo, identifiquei grupos ou alunos cujas produções e resoluções são importantes para partilhar com toda a turma, no momento de discussão, aspeto também referido por Canavarro (2011). No momento de discussão assumi uma atitude de moderador das intervenções, gerindo-as e orientando-as, como sugere Ponte (2005).

## 6.2. **Discussão dos resultados**

### 6.2.1. Aspetos gerais

Como já referi, as seis tarefas propostas foram agrupadas em três pares distintos de acordo com as estruturas matemáticas da sequência numérica. As tarefas de cada par, apesar de apresentarem a mesma estrutura matemática, diferem nos elementos pictóricos que as constituem. Em cada par de sequências, uma delas é construída com fósforos, enquanto os termos da outra sequência são desenhos. Nas tarefas cujo enunciado apresentam sequências pictóricas crescentes formadas por fósforos, foi disponibilizado material manipulável para que os diversos grupos possam realizar representações ativas.

Ao longo do encadeamento de tarefas, os alunos utilizaram as representações ativas, icónicas e simbólicas. A representação ativa, com utilização de material manipulável, foi usada nas tarefas “Pá com fósforos”, “Sequência de árvores construídas com fósforos” e “Sequência letras “A” com fósforos”, respetivamente as tarefas 1, 3 e 5. Em relação à tarefa 1, todos os grupos utilizaram fósforos para representar os termos próximos; na tarefa 3, quatro grupos recorreram à representação ativa para determinar o número de fósforos das figuras solicitadas e, na tarefa 5, oito grupos optaram por utilizar fósforos para representar os termos próximos. Após a construção das figuras pedidas, os alunos representaram-nas no enunciado, replicando então a estrutura obtida. Na discussão em grande grupo, vários alunos afirmaram que despenderam muito tempo na construção das figuras, considerando desnecessária esta representação, pois julgam ser mais fácil e prático desenhar imediatamente as figuras dos termos solicitados no enunciado. É importante realçar que, na tarefa 5, durante o trabalho autónomo, cerca de cinco alunos utilizaram fósforos para fazer construções não solicitadas, focando-se noutros aspetos, interferindo com o trabalho de grupo e com o objetivo e propósito da tarefa, sendo necessária a intervenção do professor. Estes aspetos podem sugerir que a utilização de determinadas representações ativas, por alunos do 4.º ano, poderão ser, por estes dispensáveis e, facilmente substituídas por outras representações. Para Stylianou (2010, referida por Ponte & Velez, 2011), as representações ajudam a interpretar, sistematizar e compreender a informação dada no enunciado, a explorar e perceber qual a melhor forma de chegar a uma resposta correta, bem como monitorizar e avaliar o processo da resolução do problema. Para estes alunos, a representação pictórica dos termos revela-se suficiente para a identificação de regularidades da sequência. As tarefas 1, 2 e 5 apresentaram tabelas que foram usadas pelos alunos como representações icónicas para organizar os dados apresentados, contribuindo para a identificação de regularidades.

As representações icónicas surgiram naturalmente em todas as tarefas propostas no estudo, contudo, foram mais utilizadas nas questões iniciais, ou seja, nas questões que envolvem a determinação do número de objetos de termos próximos. O rigor do desenho e consequente representação icónica de termos próximos não condicionaram a correção das respostas, o mesmo não se verifica quando os alunos desenharam termos distantes, em que o rigor do desenho influencia a contagem do número de objetos que constituem esses termos. Bruner (1999) considera as representações icónicas muito importantes na fase inicial de resolução de uma situação problemática, aspeto que se verifica neste estudo, pois a representação de todos os termos da sequência até ao termo pedido, permite a que alguns grupos respondam a diversas questões.

Observei que ao longo da intervenção, com a exploração das tarefas, aumentou a utilização e diversidade de representações simbólicas. Assim, temos representações simbólicas quando os alunos associam uma sequência numérica à sequência pictórica crescente, originando uma representação que relaciona os termos da sequência e respetivo número de objetos, como é o caso do grupo 3 na questão 2.4. Alguns alunos produziram representações até um termo bastante distante, permitindo responder a questões relacionadas com a descoberta do número de objetos de termos distantes e com questões em que era necessário inverter o raciocínio, ou seja, dado um determinado número de objetos, verificar a existência de um termo correspondente. Outras representações simbólicas foram usadas quando alguns alunos, como por exemplo os do grupo9, na questão 3.6., apresentaram as suas repostas recorrendo a símbolos (= ; ?).

Começaram também a surgir expressões matemáticas que representam a forma como os alunos percecionam a formação de cada termo, através da decomposição das figuras da sequência, como é exemplo a representação apresentada pelo grupo 8, na questão 6.3., ou através da apresentação de uma expressão que permite encontrar o número de objetos de uma figura da sequência, qualquer que seja o termo, como é o caso da produção feita pelo grupo 12, na questão 5.7. Nas tarefas 3 e 4, os alunos mobilizaram conhecimentos prévios relacionados com conteúdos explorados no 2.º e 3.º anos, nomeadamente, a tabuada do 3, divisor de um número e número divisível por outro.

Em todas as tarefas, verificou-se a presença da linguagem natural, quer oral, quer escrita. É através dela que os alunos expressam as suas dúvidas e dificuldades na realização das tarefas e desenvolvem a comunicação matemática (Morais, 2012). Nas diversas tarefas, os alunos recorreram à linguagem natural escrita quando não conseguiram expressar algebricamente a regularidade presente em cada sequência ou a respetiva lei de formação. Verifiquei que os alunos têm mais facilidade em expressar oralmente do que por escrito as suas ideias e regras verificadas nas sequências apresentadas, aspeto já verificado por Borralho et al. (2009). Observei também, que ao longo do encadeamento de tarefas e de uma forma gradual, mais alunos optaram por utilizar a sequência pictórica crescente apresentada no enunciado para registar observações, identificar regularidades e nomear uma lei de formação, recorrendo cada vez mais a símbolos matemáticos para o efeito.

Os resultados mostraram que os alunos usam as diferentes representações para responder a questões de diferentes níveis de complexidade. Através da análise das representações visuais e numéricas, alguns alunos identificaram e compreenderem a existência de uma lei de crescimento comum entre pares de tarefas deste estudo, verificando-se que, na exploração da segunda tarefa com a mesma estrutura matemática mas com diferentes elementos pictóricos, os alunos procuraram utilizar mais consistentemente as representações simbólicas, pois mobilizaram as aprendizagens adquiridas na exploração das tarefas anteriores. Para além da representação simbólica, a linguagem natural esteve permanentemente presente nesta experiência de ensino, pois é através dela que os alunos expressaram as normas que sustentam e explicam as diversas formas de representação a que recorrem. Na realização desta experiência de ensino, alguns alunos tenderam a usar expressões numéricas e/ou simbólicas para expressar a forma de descobrir qualquer temo da sequência, recorrendo a símbolos e nomes para representar a variável, arquitetando assim, expressões de cunho algébrico. Barbosa et al.

(2011) referem o recurso à simbologia como o primeiro “passo para o uso de variáveis e conceito de função” (p.39). Apesar de não usarem regras típicas do simbolismo algébrico, os alunos mostraram-se capazes de pensar algebricamente, aspeto referido por Zazkis e Liljedahl (2002).

Identifiquei diversas estratégias no trabalho desenvolvido pelos alunos. A análise dos resultados deste estudo, mostra que as estratégias representação e contagem e aditiva foram utilizadas com mais frequência nas questões relacionadas com termos próximos; as estratégias aditiva e decomposição dos termos foram utilizadas sobretudo nas questões em que se pretendia determinar termos distantes, inverter o raciocínio e encontrar uma regra geral de formação da sequência. Nos pontos 6.2.2. e 6.2.3 deste capítulo, faço uma análise mais detalhada dos resultados relativamente às estratégias utilizadas pelos alunos, fazendo-se o paralelismo entre estratégias utilizadas em sequências com a mesma estrutura matemática e estratégias utilizadas pelos alunos em diferentes estruturas matemáticas.

Neste estudo, os alunos apresentaram generalizações aritméticas e algébricas. Radford (2006, citado por Ponte et al., 2014) refere que, nestas sequências, a generalização pode ter uma natureza aritmética ou algébrica, e que esta última pode ser factual, contextual ou simbólica. Neste estudo todos os alunos conseguiram fazer generalizações aritméticas, associadas à utilização de estratégias aditivas, apresentando deste modo um raciocínio recursivo que dá atenção ao que se vai alterando de figura para figura. Deste modo, os alunos apoiaram-se nas figuras anteriores representadas na sequência ou por eles construídas, quer sejam representações ativas, quer sejam icónicas, ou apoiaram-se em cálculos matemáticos que lhes permitiram verificar o que se acrescenta de uma figura para a seguinte, focando-se essencialmente na contagem dos elementos e não na visualização das figuras. Temos alunos que, nas tarefas iniciais, apresentaram generalizações aritméticas, contudo, ao longo do projeto, começaram a apresentar estratégias de natureza algébrica. Estes resultados são analisados e apresentados, de uma forma mais descritiva, no ponto 6.2.4 deste estudo.

### 6.2.2. **Paralelismo entre as estratégias utilizadas pelos alunos em sequências com a mesma estrutura linear**

Neste ponto, relaciono as estratégias utilizadas pelos alunos em sequências com a mesma estrutura linear, mas com diferentes disposições pictóricas. Assim, relaciono a tarefa 1 com a tarefa 2, de estrutura linear "*n+b*"; a tarefa 3 com a tarefa 4, de estrutura linear "*an*"; e a tarefa 5 com a tarefa 6 cujas estruturas lineares são "*an+b*".

Atendendo às tarefas 1 e 2, as duas primeiras questões em que os alunos tiveram de desenhar uma figura da sequência e indicar o número de objetos que compõe essa mesma figura, todos os grupos, excetuando o 11, utilizaram a estratégia representação e contagem. Na questão 1.2., o grupo 11 utilizou a estratégia aditiva, identificando que para determinar o número de fósforos da figura seguinte, basta adicionar um fósforo à figura anterior. Contudo, para responder à questão 2.2., o grupo 11 optou por utilizar a estratégia representação e contagem, referindo que "é mais fácil contar logo os pentágonos do desenho" (Pedro, grupo 11). Deste modo, para indicar o número de objetos da figura solicitada, os alunos limitaram-se a fazer a contagem do número de fósforos da representação ativa ou o número de pentágonos da representação icónica, ideia partilhada por Warren e Cooper (2008) que referem que a utilização da estratégia representação e contagem e aditiva, aquando da visualização e descrição da sequência, focando-se apenas no termo e desvalorizando ou esquecendo o número da ordem desse termo, constitui um constrangimento para a evolução dos raciocínios. Nas questões 1.3. e 2.3., os alunos foram convidados a completar uma tabela. Os dados recolhidos evidenciam que na questão 1.3., excetuando o grupo 1, que utiliza a estratégia decomposição dos termos, todos os outros, utilizaram a estratégia aditiva, enquanto na questão 2.3. é visível um aumento na utilização da estratégia decomposição dos termos. Este aspeto prende-se com o facto destes alunos terem reconhecido a mesma estrutura linear e com a forma como foi explorada e conduzida a tarefa 1, permitindo a discussão e utilização de diferentes estratégias de resolução.

Nas duas questões seguintes das tarefas 1 e 2, os alunos tiveram de indicar o número de elementos de termos distantes. Na tarefa 1, dezoito alunos utilizaram a estratégia aditiva, seis a estratégia decomposição dos termos e dois a estratégia objeto inteiro. Os alunos que utilizaram a estratégia aditiva, completaram as tabelas até aos termos solicitados, não manifestando, durante a discussão coletiva, qualquer preocupação ou intenção em utilizar outra estratégia de resolução. Na tarefa 2, menos alunos utilizaram a estratégia aditiva para determinar o número de objetos de termos distantes, consequentemente, diminuiu também o uso da representação pictórica da tabela até ao termo pedido. Assim, na tarefa 2, já foi manifesta a intenção dos alunos em utilizar outras estratégias, aspeto trabalhado durante a discussão e exploração coletiva da tarefa 1, em que observaram e questionaram as estratégias dos colegas, foram convidados a expressar oralmente e por escrito as suas ideias, mobilizando conhecimentos prévios e introduzindo alguns símbolos matemáticos. Deste modo, nestas questões da tarefa 2 verificou-se uma maior utilização da estratégia decomposição dos termos e objeto inteiro. A estratégia decomposição dos termos foi acompanhada da utilização de alguma simbologia matemática, aspeto que parece sugerir a ideia sugerida por Fosnot e Dolk (2002) e Huinker (2002), citados por Ponte (2014), em que afirmam que ao se realizar "uma ligação entre a linguagem informal dos alunos e a compreensão concetual promove-se a sua capacidade de lidar com os símbolos e a linguagem matemática formal, transformando-se estes últimos em ferramentas com sentido que os ajudam a pensar" (p. 86). Assim, os alunos podem usar de forma flexível os seus conhecimentos matemáticos (Huinker, 2002), escolhendo a representação que consideram mais favorável num determinado contexto (Ponte, 2014). Oito alunos usaram a estratégia objeto inteiro, não identificando a inexistência de uma situação de proporcionalidade direta.

Nas questões 1.6. e 2.6., em que tiveram de inverter o raciocínio, catorze alunos utilizaram a estrutura subjacente à tabela para resolver a questão 1.6., enquanto na questão 2.6., apenas seis alunos utilizaram a referida representação e consequente estratégia aditiva. Mais alunos utilizaram a estratégia decomposição dos termos, em que reconheceram a expressão geradora da sequência, relacionando-a com a sequência apresentada e explorada na tarefa 1, aspeto que sugere ter facilitado a utilização desta estratégia. Na última questão das tarefas, os alunos tiveram de indicar uma regra que lhes permita determinar o número de objetos de uma figura da sequência, qualquer que seja a sua ordem. Mais uma vez, as estratégias utilizadas diferem bastante relativamente à sua natureza. Assim, na tarefa 1, em que a estratégia aditiva foi a mais utilizada, os alunos optaram pela linguagem escrita para justificar as suas respostas, não evidenciando qualquer intencionalidade de cunho algébrico. Paralelamente, na questão 2.7., verificou-se que apenas seis alunos utilizam a estratégia aditiva, recorrendo também à linguagem verbal para justificar o seu raciocínio. Dois alunos continuaram a não responder à questão, revelando não ter percebido o que lhes era solicitado e dezoito alunos utilizaram a estratégia decomposição dos termos, numa abordagem de cunho algébrico. Destes, oito alunos optaram por referir termos de ordem distante, atribuindo sempre um valor à ordem, seis utilizaram a linguagem escrita, evidenciando o “número da figura” e quatro utilizaram símbolos matemáticos que mostram uma relação entre as variáveis. A exploração destas duas tarefas mostrou-nos uma maior tendência para a utilização da estratégia decomposição dos termos, o que sugere a aquisição de processos de generalização. Esta tendência foi certamente fruto da dinâmica da sala de aula baseada na exploração de tarefas matemáticas de cunho essencialmente exploratório (Ponte, 2005), que envolvem sequências e regularidades, permitindo aos alunos uma interação social em pequeno grupo e em grupo-turma, com o propósito de utilizar diferentes representações, assim como, diferentes estratégias de generalização.

Os enunciados das tarefas 3 e 4, não incluíam questões com tabelas para completar. Esta opção teve como objetivo perceber se os alunos autonomamente criavam as suas próprias tabelas como forma de organizar a informação, aspeto que pode conduzir à utilização da estratégia aditiva, como defendem Barbosa et al. (2011) ao sublinharem que com a tabela os alunos usam mais facilmente o pensamento recursivo, permitindo-lhes descobrir, neste estudo específico, qual a regularidade subjacente a cada sequência. Nas tarefas 1 e 2,que têm tabelas para completar, vários alunos continuaram o seu preenchimento para determinar o número de objetos de figuras distantes. Na tarefa 3, seis alunos utilizaram a estratégia aditiva com recurso à tabela e na tarefa 4, apenas dois alunos construíram uma tabela, utilizando a mesma estratégia, aspeto que pode sugerir então que o uso da tabela pode promover a utilização da estratégia aditiva. Na questão em que tiveram de indicar o número de objetos das figuras que construíram/desenharam, a maioria dos alunos optou por fazer a contagem dos elementos dessas figuras. A maioria dos alunos, em ambas as tarefas, identificou nas sequências regularidades nas estruturas que vão alterando a disposição pictórica de uma forma identificável, por alguns, como “múltiplos de 3”, e/ou “tabuado do 3”, sendo essa estrutura utilizada para determinar o número de objetos de termos distantes, o que lhes permitiu responder adequadamente às questões que envolvem a descoberta do número de objetos de termos distantes. Muitos alunos pareceram reconhecer a existência de proporcionalidade direta entre o número da figura e respetivo número de objetos, o que lhes permitiu descobrir o número de objetos de termos distantes, através da estratégia decomposição dos termos. Nas questões em que tiveram de inverter o raciocínio, as estratégias e justificações utilizadas pelos alunos na questão 3.5. mantiveram-se idênticas às estratégias utilizadas na questão 4.5.

Assim, na tarefa 3,catorze alunos usaram a estratégia decomposição dos termos recorrendo à "tabuada do 3" para justificar os seus raciocínios, oito alunos utilizaram a estratégia aditiva, na questão 3.4., alunos utilizaram a estratégia objeto inteiro, sendo que na questão 3.5., quatro destes alunos substituíram-na pela estratégia aditiva e dois pela estratégia decomposição dos termos. Realço que dois alunos utilizaram o conteúdo "número divisível por outro", verificando a existência de uma divisão exata entre o número de objetos da figura proposta e a constante de proporcionalidade. Verifiquei que os alunos ao identificarem que o crescimento destas sequências se relaciona com conhecimentos que lhes são familiares, nomeadamente o conteúdo "tabuada do 3" e/ou "múltiplos de 3", mobilizaram-nos insistentemente, mas não o fizeram de modo a que esta estratégia desse origem a uma resposta correta. Relativamente à última questão das tarefas 3 e 4, em que os alunos tiveram de descobrir o número de objetos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número, na questão3.6., seis alunos utilizaram a estratégia aditiva, através da linguagem verbal escrita, quatro não conseguiram dar uma resposta válida e os restantes utilizaram a estratégia decomposição dos termos, utilizando essencialmente a linguagem verbal escrita para expressar os seus raciocínios. Por seu lado, na questão 4.6., todos os alunos utilizaram a estratégia decomposição dos termos não se verificando a utilização da estratégia aditiva. Verifica-se assim que, de uma tarefa para a outra, diminuiu o número de alunos que recorreram à representação em tabela para organizar e sistematizar a informação e diminuiu também a utilização da estratégia aditiva que foi substituída pela estratégia decomposição dos termos. A observação destes resultados na tarefa 4, traduz o facto de muitos alunos terem mobilizado os conhecimentos adquiridos na tarefa anterior, resultado das discussões em grande grupo, em que, oralmente ou por escrito, foram discutidas todas as representações, ideias e estratégias pertinentes para o estudo da sequência em questão.

Relativamente às tarefas 5 e 6, com o objetivo de verificar, uma vez mais, a eventual influência da tabela na promoção da estratégia aditiva, optei por confrontar duas tarefas com a mesma estrutura linear, em que nas questões da tarefa 5 foi solicitado aos alunos o preenchimento de uma tabela, enquanto na tarefa 6, esta questão não estava presente. A análise dos dados mostra que, excetuando dois alunos, os restantes utilizaram a estratégia aditiva para completar a tabela. Nas questões 5.4. e 6.3., em que os alunos tiveram de determinar o número de objetos de termos distantes, verificou-se uma utilização significativa da estratégia aditiva e do uso da tabela que os alunos completaram até aos termos solicitados. Curiosamente, na tarefa 6, em que nas questões apresentadas não apareceu uma tabela para preencher, catorze alunos construíram tabelas que lhes permitiram, uma vez mais, sistematizar e organizar a informação que, posteriormente, foi utilizada noutras questões da tarefa. Quando questionados relativamente à construção e preenchimento das tabelas, estes alunos referiram que consideram estas sequências "um pouco mais difíceis de perceber" (Raquel, grupo 1) e de "encontrar uma regra" e que com a tabela "não sou obrigado a pensar muito e é mais fácil" (Francisco, grupo 6). Uma sequência crescente, embora se prolongue mantendo uma regularidade previsível em relação ao termo anterior, modifica a sua estrutura de termo para termo, aspeto que pode trazer dificuldades aos alunos (Moyer-Packenham, 2005). Segundo Orton e Orton (1999), os alunos quando confrontados com questões relacionadas com termos mais distantes da sequência podem passar de um método correto para a utilização de um método incorreto. Na tarefa 5, verifica-se que alguns alunos utilizaram a estratégia objeto inteiro, contudo de uma forma errada. Estes alunos referiram que nas tarefas anteriores "multiplicaram sempre por um número e dava certo" (Margarida, grupo 11). Creio que estes alunos não perceberam que agora se tratam de estruturas lineares distintas. Os alunos, ao identificarem uma regra válida para as tarefas anteriores, julgaram-na também válida para determinar os termos distantes de qualquer sequência pictórica crescente. Ponte, Branco e Matos (2009) referem que é possível determinar corretamente os termos de algumas ordens, com base na estratégia objeto inteiro e analisando com atenção os termos da sequência, contudo, estes autores defendem que caso os alunos não observem as propriedades da figura, a estratégia objeto inteiro dificulta a generalização. Assim, verifico que os alunos que utilizaram a estratégia "objeto inteiro" pareceram manifestar dificuldades em criar uma regra que permita encontrar qualquer termo da sequência, ideia também mencionada por Ponte, Branco e Matos (2009). Esta estratégia funciona quando há proporcionalidade direta, contudo, não funciona quando esta proporcionalidade é inexistente (Ponte, Branco & Matos, 2009). Em relação às questões em que os alunos tiveram de inverter o raciocínio, na questão 5.6. a maioria dos alunos utilizou a estratégia aditiva e na questão 6.5. dez alunos verificaram que o número de círculos que compõem os termos da sequência, é ímpar, justificando desta forma a resposta. Relativamente à última questão das tarefas 5 e 6, em que os alunos tinham de descobrir o número de objetos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número, dez alunos utilizaram a estratégia decomposição dos termos na tarefa 5 e vinte e quatro alunos utilizaram esta estratégia na tarefa 6. A maioria dos alunos optou, pela linguagem verbal escrita como forma de expressar regras que lhes permitissem calcular o número de objetos, qualquer que seja o número da figura. Creio que, uma vez mais, este aumento da utilização da estratégia decomposição dos termos, se deveu ao trabalho de cunho exploratório na sala de aula. Nestas tarefas realço que vinte e quatro alunos reconheceram tratar-se de sequências com a mesma estrutura linear, associando também a sequência pictórica crescente à respetiva sequência numérica. Para Ponte, Branco e Matos (2009), a "estratégia 'decomposição dos termos', potencia o surgimento de diferentes expressões algébricas para generalizar a sequência numérica associada à sequência pictórica em análise"(p.47).

Para realizar este paralelismo entre as estratégias utilizadas pelos alunos em sequências com a mesma estrutura linear, utilizei a informação contida nas tabelas T2 a T7 (que se encontram nos anexos), que ia preenchendo à medida que ia recolhendo os dados relativos às estratégias utilizadas e categorias de generalização apresentadas. Estas tabelas revelaram-se uma mais-valia, pois sistematizei de uma forma simples toda essa informação, permitindo perceber as estratégias utilizadas, dando também uma ideia global das estratégias utilizadas ao longo da exploração das tarefas.

### 6.2.3. **Estratégias utilizadas pelos alunos em sequências com diferente estrutura linear**

Todas as estratégias foram utilizadas pelos alunos nas seis tarefas apresentadas, contudo, através da análise das tabelas T2 a T7, é visível uma preferencial utilização de determinadas estratégias em questões e tarefas específicas. Assim, nas questões que envolveram o desenho de uma figura próxima e indicação do respetivo número de objetos, a estratégia "representação e contagem", foi a mais utilizada pelos alunos. Nas questões que envolveram a descoberta do número de objetos de termos distantes, nas tarefas de estrutura linear "$n+b$" e "$an+b$", a estratégia mais utilizadas pelos alunos foi a estratégia aditiva. Na tarefa cuja estrutura linear é "$an$", a estratégia mais utilizada foi a decomposição dos termos. Nas questões que envolvem o raciocínio inverso, as estratégias utilizadas são aditiva e decomposição dos termos. Na estrutura linear "$an$", a estratégia decomposição dos termos foi amplamente a mais utilizada, nas restantes verifica-se igualmente que, de uma forma progressiva, os alunos começaram também a utilizar esta estratégia de uma forma mais consistente. Na questão que implica a criação de uma regra de formação que permitisse determinar o número de objetos de uma figura da sequência, qualquer que fosse a sua ordem, as estratégias utilizadas foram sobretudo a aditiva e decomposição dos termos.

Ao longo do estudo, e à medida que íamos explorando as tarefas verificou-se que, progressivamente, os alunos começaram a utilizar com maior frequência a estratégia decomposição dos termos o que sugere o estabelecimento de uma generalização e consequentemente a descoberta do termo geral. Por vezes, a descoberta desta relação que pode ser aplicada a qualquer figura não é imediata, passando por um processo de evolução. Para essa evolução, contribuíram as questões por mim colocadas, principalmente nos momentos de discussão coletiva, numa tarefa que se reflete na realização da tarefa seguinte, levando-os a focar-se na decomposição do termo e na relação deste com o seu número de ordem, abstraindo-se de uma figura concreta (Billings et al., 2008; Pimentel et al., 2010; Warren & Cooper, 2008). A análise dos dados sugerem que os elementos pictóricos e arranjos visuais diferentes que constituem as tarefas de cada par com a mesma estrutura linear não influenciaram as estratégias utilizadas e as generalizações efetuadas pelos alunos. Penso que a experiência de ensino assente na exploração de sequências e regularidades contribuiu para que os alunos tivessem a oportunidade de se envolverem em situações de resolução de problemas, permitindo-lhes obter os requisitos matemáticos formais da generalização algébrica (Rivera& Becker, 2008). Também, de uma forma gradual, ao longo das tarefas, verificou-se um aumento na representação através de símbolos matemáticos corretos, levando à compreensão desses símbolos e da linguagem algébrica, ideia defendida por (Ponte, Branco & Matos, 2009).

### 6.2.4. **Natureza das generalizações**

Em relação às generalizações apresentadas, neste estudo, a maioria dos alunos conseguiu ir desde uma generalização aritmética para uma generalização algébrica, conseguindo escrever uma frase ou uma expressão algébrica que poderia ser aplicada a qualquer termo da sequência considerando a sua ordem (Stacey, 1989; Vale etal., 2011). Assim, os alunos evoluíram de um raciocínio aritmético, associado à estratégia aditiva, para um raciocínio algébrico, associado à estratégia decomposição dos termos, embora de uma forma por vezes inconsistente, através do trabalho desenvolvido. Alguns alunos demonstraram ter atingido um raciocínio algébrico para algumas tarefas, mas perante tarefas com uma outra estrutura linear, não o conseguiram fazer. Assim, nas tarefas com estrutura linear "*n*+*b*", catorze alunos apresentaram uma generalização algébrica na tarefa 1, enquanto na tarefa 2, dezoito alunos apresentaram esta generalização. Relativamente à estrutura linear "*an*", na tarefa 3, seis alunos apresentaram uma generalização aritmética, quatro não evidenciaram qualquer generalização e dezasseis apresentaram uma generalização algébrica. Na tarefa 4, todos os alunos apresentaram uma generalização algébrica, o que evidencia a aquisição de competências de generalização. Em relação à estrutura linear "*an*+*b*", na tarefa 5, catorze alunos apresentaram uma generalização aritmética e quatro não expressaram qualquer generalização. Na tarefa 6, vinte alunos apresentaram uma generalização algébrica e seis não evidenciaram qualquer generalização, assim, também nesta estrutura matemática ficou evidente que, da tarefa 5 para a 6, os alunos os alunos começaram a apresentar processos de generalização. Realço que, para identificar as generalizações apresentadas pelos alunos, analisei essencialmente as produções escritas, concretamente as questões 1.7., 2.7., 3.6., 4.6., 5.7. e 6.6.

Deste modo, e atendendo aos resultados verificados, penso que o objetivo de promover o desenvolvimento do pensamento algébrico em vinte e seis alunos de 4.º ano, através da exploração de seis tarefas exploratórias relacionadas com sequências pictóricas crescentes, foi parcialmente cumprido, pois os resultados sugerem que seis alunos ainda não apresentam, de uma forma consistente, uma generalização algébrica. Contudo, deve reconhecer-se que este trabalho com vista ao desenvolvimento da generalização é gradual e requer continuidade e a exploração de novas situações para aprofundamento da compreensão dos alunos.

## 6.3. Dificuldades manifestadas

Ao longo do estudo, os alunos evidenciaram algumas dificuldades. Algumas delas parecem ter sido debeladas durante o próprio estudo. Muitos alunos manifestaram dificuldade em desenvolver o trabalho em pares, não escutando as ideias dos colegas, nem partilhando as suas, aspeto que levou à minha intervenção no sentido de ultrapassar este problema e de promover o trabalho de interação em grupo. Uma outra dificuldade manifestada prende-se com a interpretação da questão 1.7., em que a maioria dos alunos não entendeu o seu objetivo, considerando-a bastante extensa e confusa. No entanto, esta dificuldade foi superada, através da discussão coletiva, contribuindo para a compreensão das questões similares de tarefas a desenvolver posteriormente. Uma outra dificuldade manifestada por alguns alunos, está relacionada com o pedido para justificar as respostas ou mostrar como pensaram, em que os alunos não responderam objetivamente, recorrendo muitas vezes à informação implícita em cálculos ou em tabelas. As dificuldades de comunicação são também evidentes quando os alunos tentaram explicar, oralmente ou por escrito, os seus raciocínios ou indicar a regra de formação de uma sequência qualquer que seja a figura. Relativamente às sequências pictóricas crescentes, vários alunos manifestaram dificuldade em identificar o que é comum entre um termo e o seguinte, manifestando dificuldade em representar corretamente cada termo da sequência. A identificação da expressão geradora também é um aspeto que merece também alguma atenção, pois alguns alunos não relacionaram um termo com a ordem correspondente na sequência, o que impossibilita o raciocínio algébrico, pois a generalização pode levar a este tipo de raciocínio (Barbosa et al., 2011). A gestão da motivação para explorar as tarefas por parte dos alunos com um desempenho mais fraco a Matemática foi outra dificuldade evidente pois, estes alunos com mais dificuldades, apesar de se envolverem na resolução das tarefas, não as resolvem tão depressa como os colegas, como realçam Luís, Bártolo e Serrazina (1996). Outra dificuldade observada, prende-se com a gestão do tempo disponível destinado a cada momento da tarefa, mais concretamente ao trabalho autónomo em pares. Previamente, era acordado com os alunos o tempo a despender em cada um dos momentos. Contudo, alguns alunos manifestavam dificuldade nesta gestão, aspeto que conduzia a uma pressão acrescida e a resultados pouco claros ou errados.

### 6.4. **Recomendações para a sala de aula e construção de tarefas**

A recomendação que emerge como mais significativa para o trabalho em sala de aula prende-se com a abordagem de ensino exploratório na Matemática, aspeto determinante neste estudo. Ponte (2005) refere que não é suficiente selecionar boas tarefas, é preciso ter atenção o modo de as propor e de conduzir a sua realização em sala de aula. Este autor refere ainda que na planificação do seu trabalho, o professor deve ter em consideração três aspetos fundamentais: o que prevê fazer, o que prevê que os alunos façam e a sequência das atividades. Ponte (2005) considera dois tipos de estratégias diferentes no ensino da Matemática: o ensino direto que pressupõe uma transmissão unidirecional do conhecimento do professor para o aluno, e o ensino aprendizagem exploratório, em que o professor não tem como objetivo explicar tudo, deixando uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem. Neste estudo, o ensino exploratório da Matemática contribuiu determinantemente para a promoção do pensamento algébrico por parte dos alunos. Com esta prática os alunos são os arquitetos das suas aprendizagens, construindo-as e cimentando-as, assumindo o momento de discussão em grupo-turma um momento privilegiado para a confluência de troca de ideias e de estratégias, para apresentarem as suas representações, para darem exemplos, para questionarem os colegas, criticando o seu trabalho e o dos outros. Deste modo, este ensino contribuiu para que o desempenho de cariz algébrico dos alunos na segunda tarefa de cada estrutura linear apresentada fosse mais evidente. Ou seja, a discussão e exploração da primeira tarefa de cada estrutura linear em grande grupo, contribuiu para que os alunos, para além de identificarem uma estrutura linear igual, conseguissem utilizar estratégias evidenciando uma generalização algébrica e, sempre que necessário, as mobilizem para situações futuras.

Ponte, Branco e Matos (2009) referem que “tarefas envolvendo generalizações, para além de promoverem a capacidade de abstração, visam também desenvolver a capacidade de comunicação e raciocínio matemático”(p.41). Desta forma, em consonância com o ensino exploratório da Matemática (Ponte, 2005; Canavarro, 2009), proponho a construção de tarefas envolvendo sequências pictóricas crescentes, com as mesmas estruturas lineares, mas com outros arranjos pictóricos e visuais, no sentido de avaliar e validar as aquisições realizadas no decorrer deste estudo. É importante a diversificação das tarefas propostas aos alunos, caso contrário, poderão julgar que todas se resolvem utilizando as mesmas estratégias. A estrutura linear da sequência numérica que se pretende estudar, associada a sequências pictóricas revela-se importante para o desenvolvimento da compreensão dos alunos e para a sua capacidade de generalização, pelo que deve ser um aspeto a atender pelo professor na sua prática, diversificando essas estruturas, além da diversificação do aspeto pictórico das sequências.

## 6.5. **Limitações do estudo**

O facto de os alunos não estarem familiarizados com esta prática de ensino, com o partilhar as suas ideias com os colegas de grupo, respeitar a sua vez, foram aspeto que foram melhorando progressivamente com a continuidade do trabalho em grupo e realização das tarefas. Uma outra possível limitação do estudo, motivada por questões pessoais e profissionais, foi o tempo decorrido entre a exploração da tarefa 2 e a tarefa 3, verificando-se um intervalo de dois meses. Isso não permitiu um encadeamento padronizado das tarefas, motivando algum desapego e desinteresse relativamente ao estudo por parte de alguns alunos e eventualmente, um distanciamento relativamente às ideias matemáticas trabalhadas nas tarefas anteriores. O facto de assumir simultaneamente o papel de professor e investigador, limitou em parte o meu desempenho na exploração das tarefas, pois, ocasionalmente, tinha de interromper a dinâmica da sala de aula por breves momentos para verificar se a câmara de filmar ainda tinha bateria ou se estava numa posição que permitisse captar evidências significativas e pertinentes para o estudo. Contudo, tal situação não interferiu com o cumprimento dos objetivos de trabalho com os alunos. A preocupação em recolher dados diversificados e em número significativo era uma constante preocupação. Considero também que este projeto teria beneficiado com o alargamento dos conteúdos explorados. Para que tal pudesse acontecer seria necessário a exploração de um maior número de tarefas e que estas fossem mais diversificadas, contudo, tal alargamento obrigaria a um aumento de aulas observadas.

### 6.6. Reflexão final

A realização deste trabalho contribuiu bastante para o meu enriquecimento profissional, visto ter sido a primeira vez que trabalho com sequências pictóricas crescentes no âmbito de uma abordagem de ensino exploratório na Matemática. De acordo com o objetivo da aula e/ou do estudo, a seleção das tarefas assume um papel essencial no processo de ensino-aprendizagem. Ao longo do 1.º ciclo, o trabalho realizado por estes alunos no âmbito das sequências, recaiu na exploração isolada e pontual de tarefas, sem um encadeamento lógico de questões e sem qualquer objetivo inicial definido. Para a prática letiva, cabe então ao professor delinear objetivos claros de cada uma das tarefas. Para além de aspetos associadas ao contexto e às vivências dos alunos, as tarefas devem ser por estes compreendidas, por forma a garantir o seu envolvimento. As questões devem surgir com um nível de dificuldade crescente e o modo como estas se relacionam entre si, apoia os alunos a progredir na sua resolução, suscitando o uso de diversas estratégias e desenvolvendo as competências de comunicação matemática. Para além dos conhecimentos obrigatoriamente adquiridos, muitos deles transversais aos vários tópicos da Matemática e do domínio de diversas áreas de âmbito social, apreendia abrangência e as potencialidades deste projeto e a sua verdadeira importância no desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. Foi realmente importante ter tido a oportunidade de explorar e investigar outras noções matemáticas de forma contextualizada e com significado. Preocupei-me em desafiar os alunos com tarefas motivadoras, envolvendo-os na partilha e na descoberta de novas representações e estratégias, levando-os permanentemente a criticar os resultados obtidos e a promover a criatividade. Assumi um papel de orientador e facilitador das aprendizagens, tendo os alunos a real função de orquestrar as próprias aprendizagens, contribuindo também para as aprendizagens dos colegas, quer no trabalho autónomo, quer nas discussões em grupo-turma.

Foi gratificante observar uma gradual apropriação de símbolos, terminologias matemáticas, expressões numéricas, expressões algébricas, letras e pontos de interrogação por parte dos alunos, substituindo tabelas e adições intermináveis. Este trabalho também contribuiu para que os alunos criassem hábitos de trabalho em pequeno grupo, promovendo a cooperação, a partilha, a troca de ideias sobre estratégias, representações e procedimentos, assim como o diálogo e respeito por opiniões diferentes. Esta investigação sugere que os alunos conseguem expressar generalizações, usando palavras e símbolos matemáticos.

# Referências

Abrantes, P., Serrazina, L., & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica.* Lisboa: ME-DEB.

Alarcão, I. (2001). Professor - investigador: Que sentido? Que formação? In B.P. Campos, (Org.), *Formação profissional de professores no Ensino Superior* (pp. 21-30). Porto: INAFOP/Porto Editora;

Alarcão, I.,& Roldão, M. (2008). *Supervisão. Um contexto de desenvolvimento profissional dos professores*. Mangualde: Edições Pedago.

Alvarenga, D. & Vale, I. (2007) A exploração de problemas de padrão: Um contributo para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, *26*(1), 27-56.

Arcavi, A. (1994). Symbol-sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14*(3), 24-35.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 52*, 215-241.

Barbosa, A. (2009). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º Ciclo do Ensino Básico*. Tese de Doutoramento, Instituto de Estudos da Criança, Universidade do Minho.

Barbosa, A. (2011). Generalização de padrões em contextos visuais: um estudo no 6.º ano de escolaridade. In M. H. Martinho, R. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Eds.), *Actas do EIEM 2011* (pp. 327-345). Póvoa de Varzim: SPCE.

Barbosa, A., Borralho, A., Barbosa, E., Cabrita, I., Vale, I., Fonseca, L., et al. (2011). *Padrões em Matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o Ensino Básico*. (I. Vale, & T. Pimentel, Eds.) Lisboa: Texto.

Barbosa, E., & Borralho, A. (2009a). Exploring patters and algebraic thinking. In Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceedings of the 33rdConference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 344).Thessaloniki, Greece: PME.

Barbosa, E. e Borralho, A. (2009b) Exploração de Padrões e Pensamento Algébrico. InI. Vale & A. Barbosa (Org.), *Padrões: Múltiplas Perspectivas e contextos em Educação Matemática* (pp. 59-68). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Berger; P. L.,& Luckmann; T. (1976).*A construção social da realidade*. Petrópolis, RJ: Vozes.

Billings, E., Tied, T.,& Slater, L. (2008).Algebraic thinking and pictorial growth patterns. *Teaching Children Mathematics*, 14(5), 302- 308.

Blanton, M. L. (2008). *Algebra and the Elementary Classroom – Transforming Thinking, Transforming Practice.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Blanton, M., & Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36(*5), 412-446.

Boavida, A., Paiva, A., Cebola, G., Vale, I.,& Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação.

Bogdan, R.,& Bliklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico.* Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa: DEFCUL.

Branco, N. (2013). *O desenvolvimento do pensamento algébrico na formação inicial de professores nos primeiros anos*. Tese de doutoramento, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio D´Água.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante*, 26(2), 81-118.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, *115*, 11-17.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Clement, J. (2000) Analysis of clinical interviews: foundation and model viability. In A. E. Kelly & R. Lesh(Eds.). Hand book of research methodologies for science and mathematics education (pp. 547-589). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003).Design experiments in educational research, *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Coutinho, C., (2011). *Metodologia de Investigação em Ciências Sociais e Humanas: Teoria e Prática*. Coimbra: Almedina,

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. L. (Ed.), *Second handbook of mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Charlotte, NC: Information Age.

Devlin, K. (2002). *Matemática: A ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*(2), 167-180.

Dubar, C. (1997a). *A socialização: Construção das identidades sociais e profissionais*. Porto: Porto Editora.

Garcia, M. M., Hypolito, A.,& Vieira, J. (2005). As identidades docentes como fabricação da docência. *Educação e Pesquisa*, *31*(1), 45-56.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English, *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-201). New York, NY: Routledge.

Guba, E. & Lincoln, Y. (2011). *Avaliação de quarta geração*. Campinas: Editora Unicamp.

Huinker, D. (2002). Examining dimensions of fractions operation sense. In B. Litwiller & G. Bright (Eds.), *Making sense of fractions, ratios, and proportions* (pp. 72-78). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, *17* (2), 265 – 281.

Kaput, J. (1999). Teaching and learning a new algebra.In E. Fennema, & T. A. Romberg, *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133-155).Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York, NY: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (2004). Algebraic thinking in the early grades: What is it? *The Mathematics Educator, 8*(1), 139 – 151.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research in mathematics teaching and learning.* Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Lannin, J. (2005). Generalization and Justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning Activities. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(3), 231-258.

Lannin, J., Barker D., & Townsend, B. (2006). Algebraic generalisation strategies: Factors influencing students' strategy selection. *Mathematics Education Research Journal, 18*(3), 3-28.

Ludke, M., & André, M., (1986). *A pesquisa em educação: Abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches of algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Mason, J., Graham, A., & Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. London: Chapman.

Matos, A., Silvestre, A. I., Branco, N., & Ponte, J. P. (2008). Desenvolver o pensamento algébrico através de uma abordagem exploratória. In R. Luengo-González, B. Gómez-Alfonso, M. Camacho-Machín & L. B. Nieto (Eds.), *Investigación en educación matemática* XII (pp. 505-516). Badajoz: SEIEM.

ME. (1990). E*nsino Básico - Programa do 1.º Ciclo*. Lisboa: Ministério da Educação.

ME-DEB. (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências Essenciais.* Lisboa*:* ME-DEB.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGIDC.

ME (2013). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação - DGE.

ME (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa. Ministério da Educação – DGE.

ME (2018). *Aprendizagens essenciais*. Lisboa. Ministério da Educação – DGE.

Mestre, C. & Oliveira, H. (2011). Generalizar estratégias de cálculo: Um estudo sobre o pensamento relacional de alunos do 4.º ano de escolaridade. In *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Lisboa: APM (Digital).

Molina, M. (2011). Integración del pensamiento algebraico en la educación básica: Un experimento de enseñanza con alumnos de 8-9 anõs. In M. H. Martinho, R. A. Ferreira, I. Vale, & J. P. Ponte (Ed.), *Ensino e Aprendizagem da Álgebra. Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 25-51). Lisboa: SPIEM.

Morais, A. (2012). *A exploração de sequências e regularidades como suporte para o desenvolvimento do pensamento algébrico*. Tese de Mestrado, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa

Moyer-Packenham, P. (2005). Using virtual manipulatives to investigate patterns and generate rules in algebra. *Teaching Children Mathematics, 11*(8), 437-444.

NCTM (2000).*Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

NCTM (2017). *Princípios para a ação*. Lisboa: APM.

Nobre, S., Amado, N., & Ponte, J.P. (2011). Representações na aprendizagem de sistemas de equações. *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática, (*pp. 239-259). Disponível em: http://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/14.Nobre_Amado_Ponte.pdf

Nobre, S., Amado, N.,& Ponte, J.P. (2015). Resolução de problemas com a folha de cálculo na aprendizagem de métodos formais algébricos. *Quadrante, 24*(2), 85-108.

Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, 22*(2), 29-53.

Oliveira, I. &. Serrazina, L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 29-42). Lisboa: APM.

Orton, A. & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.) *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (pp.104-124).London: Cassel.

Papic, M., Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2011). Assessing the development of preschoolers' mathematical patterning. *Journal for Research in Mathematics Education, 42*(3), 237-262.

Pimenta, S. G., & Anastasiou, L. G. (2005). *Docência no Ensino Superior* (2.ª ed.) São Paulo: Cortez.

Pimenta, C.,& Saraiva, M.(2013). O Desenvolvimento do pensamento algébrico nos primeiros anos do ensino básico. *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática (*pp. 318-341).

Pimentel, T. (2010). *O conhecimento matemático e didáctico, com incidência no pensamento algébrico, de professores do primeiro ciclo do ensino básico: Que relações com um programa de formação contínua?* Tese de Doutoramento, Instituto de Estudos da Criança - Universidade do Minho.

Pimentel, T., Vale, I., Fão, A., Alvarenga, D., & Freire, F. (2010). *Matemática nos primeiros anos: Tarefas e desafios para a sala de Aula.* Lisboa: Texto.

Pinto, E., & Canavarro, A.P. (2012). O papel das representações na resolução de problemas de Matemática: um estudo no 1.º ano de escolaridade. In O. Magalhães & A. Folque (Orgs.), *Práticas de Investigação em Educação.* Évora: Departamento de Pedagogia e Educação.

Pólya, G. (2003). *Como resolver problemas*. Lisboa: Gradiva.

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.) *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5–28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática, 85*, 36-42.

Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarro (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Ponte, J. P. (2009). O novo programa de Matemática como oportunidade de mudança para os professores do ensino básico. *Interacções, 5*(12).

Ponte, J. P. (2014). Tarefas no ensino e na aprendizagem da Matemática. In J. P. Ponte (Org.), *Práticas profissionais dos professores de Matemática* (pp. 13-27). Lisboa: Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.

Ponte, J. P. (2017). A aprendizagem da Álgebra: Resultados de estudos portugueses. *Educação e Matemática, 144-145*, 27-32.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico.* Lisboa: ME-DGIDC.

Ponte, J. P., Quaresma, M. e Branco, N. (2012). Práticas profissionais dos professores de Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1, 65-86.*

Ponte, J.P., Santos, L. (2013). *Programas de Matemática: a luta entre a memorização e a compreensão. Evolução dos programas desde 1950 até aos nossos dias*. Disponível em www. publico.pt/2013/06/26/sociedade/noticia/programas-de-matematica-a-luta-entre-a-memorizacao-e-a-compreensao-1598420, data de consulta a 02/10/2019.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1º ciclo.* Lisboa: Universidade Aberta.

Ponte, J. P., Serrazina, L. (2009). O Novo Programa de Matemática: Uma oportunidade de mudança. *Educação e Matemática, 105*, 2-6.

Ponte, J. P., & Velez, I. (2011). Representações em tarefas algébricas no 1.º ciclo. *Educação e Matemática, 113*, 11-16.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, pp. 2-21. Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education*, 12(1), 1-19.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2008). Middle school children’s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM, 40*, 65-82.

Russell, S. J., Schifter, D., & Bastable, V. (2011). Developing algebraic thinking in the con-text of arithmetic. In J. Cai& E. Knuth (Eds.) *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 44-69). New York, NY: Springer.

Sasman, M., Olivier, A., & Linchevski, L. (1999). Factors influencing students’ generalization thinking processes. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23thInternational Conference for Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp. 161-168). Haifa, Israel: Technion Printing Center.

Schliemann, A., Carraher, D., & Brizuela, B. (2007). *Bringing out the algebraic character of arithmetic: From children’s ideas to classroom Practice.* New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*(2), 147-164.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford& A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12* (1988 Yearbook, pp.8-19). Reston, VA: NCTM.

Vale, I. (2012). As tarefas de padrões na aula de matemática: Um desafio para professores e alunos. *Interações*, *20*, 181-207.

Vale, I., Barbosa, A., Fonseca, L., Pimentel, T., Borralho, A., & Cabrita, I. (2008). Padrões no Currículo de Matemática: Presente e Futuro. In R. González, B. Alfonso, M. Machín, L. Nieto (Org.), *Investigación en Educación* (pp.477-493). Badajoz: SEIEM, SPCE, APM.

Vale, I., Fão, A., Portela, F., Geraldes, F., Fonseca, L., Gigante, M., Lima, S., & Pimentel, T. (2008). *Matemática no 1.º ciclo. Propostas para a sala de aula.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Viana do Castelo.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2007). Os padrões no ensino e aprendizagem da Álgebra. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & A. P. Canavarro (org.)., *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 193-211). Caminha: SEM-SPCE.

Vale, I. & Pimentel, T. (2009). Visual pattern tasks with elementary teachers and students: A didactical experience. In I. Vale & A. Barbosa (Orgs.,. *Padrões: Múltiplas perspetivas e contextos em educação matemática* (pp. 151-162). Viana do Castelo: Escola Superior de Educação.

Vale, I. & Pimentel, T. (2013).O pensamento algébrico e a descoberta de padrões na formação de professores. *Da Investigação às práticas*, *3*(2), 98-124.

Valério, N. (2005). Papel das representações na construção da compreensão matemática dos alunos do 1.º ano. *Quadrante*, *14*(1), pp. 37-66.

Warren, E. & Cooper, T. (2009). Developing mathematics understanding and abstraction: the case of equivalence in the elementary years. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 76-95.

Zazkis, R., &Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics, 49*, 379-402.

Anexos

**<u>Tarefa 1 - “Pá com fósforos”.</u>**

**Nome:_______________________________________________ Data:___/___/___**

1 - Observa a sequência de figuras construídas com fósforos:

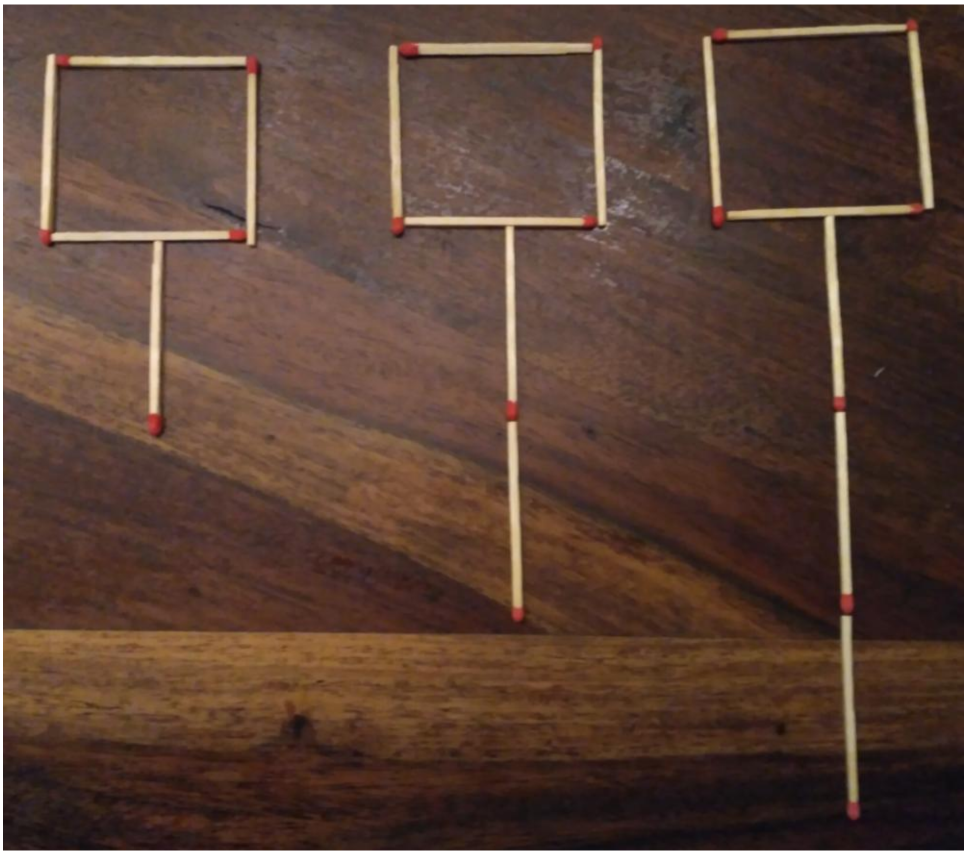


Figura 1 Figura 2 Figura 3

1.1. Desenha a figura que se segue nesta sequência.

1.2. Indica o número de fósforos que tem a 4.ª figura.

1.3. – Completa a tabela seguinte:

| Número da figura | Número de fósforos |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| | 11 |

1.4. Descobre o número de fósforos da 11.ª figura. Explica como pensaste.

1.5. Descobre o número de fósforos da 25.ª figura. Explica como pensaste.

1.6. – Existirá alguma figura com 25 fósforos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

1.7. Explica como podemos saber o número de fósforos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número.

**Tarefa 1 - Experiência pedagógica – plano de aula (sequência "Pá com fósforos").**

Nestas sequências de tarefas dá-se especial atenção à exploração de sequências pictóricas crescentes, permitindo que os alunos formulem e testem conjeturas, argumentem e expliquem as suas ideias, identifiquem a lei de formação e cheguem à generalização (ME, 2007; Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2009, Vale, 2012). Em cada tarefa, durante a exploração das sequências, cada aluno tem a possibilidade de usar diferentes representações (linguagem oral e escrita, ativa, icónica e simbólica), assim como diferentes estratégias de generalização (representação e contagem, aditiva, objeto inteiro e decomposição dos termos) (ME, 2007; Ponte et al, 2009; Ponte & Velez, 2011). Na realização das tarefas os alunos trabalham em grupos heterogéneos de dois elementos . Esta opção permite que os alunos partilhem e explicitem, entre eles, as suas ideias, por outro lado, permite que os alunos com maiores dificuldades na disciplina de matemática tenham um maior apoio ao verificarem que não compreendem a tarefa ou que não a conseguem realizar. Para além destes aspetos, o trabalho de grupo promove nas crianças o desenvolvimento da cooperação, confiança, humildade, generosidade e solidariedade (Pato, 1995; Johnson & Johnson, 1999 citados por Ribeiro, C., 2006). A formação de grupos homogéneos não seria benéfico para alunos com maiores dificuldades, eventualmente seria um obstáculo para estes ao iniciarem algumas tarefas. Eventualmente iriam perder-se nas discussões de grupo-turma devido ao pouco envolvimento e participação na realização das tarefas, dificultando assim a sua atenção.

**Tema:** Álgebra (iniciação ao pensamento algébrico)

**Conteúdos:**

- Regularidades – sequências
- Números naturais – relações numéricas

**Objetivos:**

- Determinar os termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos.
- Desenvolver a capacidade de identificar relações e de usar linguagem simbólica para as descrever.
- Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e pesquisar regularidades.
- Explorar e investigar sequências pictóricas crescentes.
- Investigar regularidades, explorando a relação das figuras com a sua posição na sequência.
- Explorar as relações entre a ordem de uma figura na sequência e o número de objetos que a constitui.
- Identificar o método de generalização para determinar elementos da sequência que não estão representados.
- Representar, analisar, descrever e generalizar sequências através de palavras, desenhos, tabelas e expressões simbólicas.
- Identificar e justificar a regra de formação da sequência.
- Estabelecer generalizações e apresentá-las oralmente e/ou por escrito.

**Momentos da aula:**

**Organização**: trabalho em grupos heterogéneos de dois elementos. Os grupos serão criados pela professora titular da turma. Tempo previsto para cada momento da aula (introdução – 10min.; momento de trabalho autónomo – 30min.; apresentação e discussão – 30min.).

**Introdução:** nesta fase, para além de sucinto e motivador, explico o trabalho a desenvolver e as etapas do mesmo, informando os elementos do tempo disponível para a realização da tarefa, das regras básicas para a realização de trabalho em grupo, da necessidade de se respeitarem e partilharem as ideias.

**Momento de trabalho autónomo:** distribuo o enunciado pelos elementos de cada grupo, onde é dado a conhecer a sequência e respetivas questões. Leio o enunciado projetado no quadro interativo, no sentido de esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir relacionadas com a compreensão de algum vocabulário específico. É importante assegurar que os alunos interpretam corretamente a tarefa no sentido de facilitar o seu envolvimento na mesma. Distribuo também material manipulável por cada grupo (conjunto de fósforos). Durante o trabalho de grupo, circulo pela sala, assumindo o papel de orientador, tentando envolve-los na tarefa.

**Apresentação, discussão e argumentação:** cada grupo, de uma forma ordeira e organizada, apresenta à turma o trabalho realizado. É um momento de confronto de resultados, discussão de estratégias, apresentação de dúvidas, estabelecimento de conceitos e de representações matemáticas, tal como sugere Ponte (2009). É pertinente atender à diversidade das estratégias na resolução das diferentes questões da tarefa, assegurando que as mesmas foram devidamente apresentadas e discutidas pela turma. Para Lannin (2003), é importante que toda a turma discuta as estratégias de cada grupo, pois torna-se útil também para demonstrar a variedade de estratégias possíveis na solução e para desenvolver expetativas da turma para o que constitui uma generalização eficiente e o que constitui uma generalização válida. Para Ponte (2009), uma aula com estas fases é designada de exploratória, pois tem em conta as tarefas a propor, a comunicação entre os alunos e o professor e a organização das unidades de ensino.

<u>**Tarefa 2 - Sequência “S”**</u>

**Nome:**____________________________________________ **Data:**___/___/___

2 - Observa a seguinte sequência em que cada figura representa  a letra “S” que são formados por pentágonos.

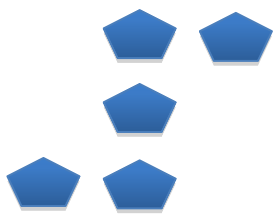


Figura 1

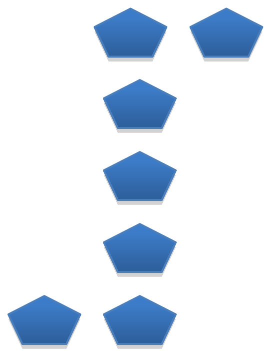


Figura 3

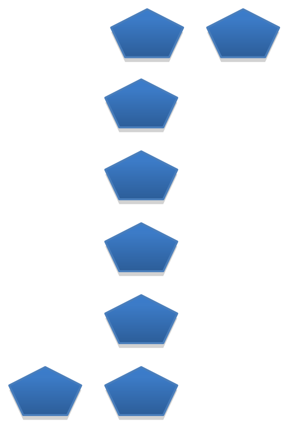


Figura 4

2.1. Desenha a figura 2.

2.2. Quantos  pentágonos tem a figura 2?

2.3. – Completa a tabela seguinte:

| Número da figura | Número de fósforos |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

2.4. - Descobre quantos pentágonos terá a 15.ª figura. Explica como pensaste.

2.5.- Descobre o número de pentágonos da 30.ª figura. Explica como pensaste.

2.6. Existirá alguma figura com 24 pentágonos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

2.7. Explica como podemos saber o número de pentágonos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número?

**Tarefa 2 - Experiência pedagógica – plano de aula ("Sequência S").**

**Tema:** Álgebra (iniciação ao pensamento algébrico)
**Conteúdos:**
- Regularidades – sequências
- Números naturais – relações numéricas
**Objetivos:**
- Determinar os termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos.
- Desenvolver a capacidade de identificar relações e de usar linguagem simbólica para as descrever.
- Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e pesquisar regularidades.
- Observar sequências pictóricas crescentes e representa-las numericamente.
- Estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas.
- Investigar regularidades, explorando a relação das figuras com a sua posição na sequência.
- Explorar as relações entre a ordem de uma figura na sequência e o número de objetos que a constitui.
-Representar, analisar, descrever e generalizar sequências através de palavras, desenhos, tabelas e expressões simbólicas.
- Identificar e justificar a regra de formação da sequência.
- Estabelecer generalizações e apresentá-las oralmente e/ou por escrito
**Recursos:**
- Enunciado para cada grupo.
- Quadro interativo.
- Material escrita.
Orientações para a aula:

**Orientações para a aula:**

**Organização:** Trabalho em grupos de dois elementos. Os grupos serão constituídos pelos mesmos elementos que exploraram a tarefa 1.. Tempo previsto para cada momento da aula (introdução – 10 min.; trabalho autónomo – 30 min.; apresentação e discussão – 30 min.).
**Introdução:** Nesta fase, para além de sucinto e motivador, explico o trabalho a desenvolver e as etapas do mesmo, informando os elementos de cada grupo do tempo disponível para a realização da tarefa, das regras básicas para a realização de trabalho em pares, da necessidade de se respeitarem e partilharem as ideias. Distribuo o enunciado pelos elementos de cada grupo, onde é dado a conhecer a sequência e respetivas questões. Leio o enunciado projetado no quadro interativo, no sentido de esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir relacionadas com a compreensão de algum vocabulário específico. É importante assegurar que os alunos interpretam corretamente a tarefa no sentido de facilitar o seu envolvimento na mesma. Deve ficar claro para os alunos que podem associar a cada figura o número de pentágonos que a constitui e que esse número varia a cada figura. A sequência pictórica crescente proposta na da tarefa 2, de tipo (n+b), apresenta exatamente a mesma lei de formação da tarefa 1 (n+4), contudo, divergem bastante relativamente aos arranjos visuais. Nesta

tarefa os alunos não dispõe de qualquer material manipulativo, o que inviabiliza representações ativas.

**Trabalho autónomo:** Durante o trabalho de grupo, circulo pela sala, assumindo o papel de orientador, tentando envolvê-los na tarefa. Além disso, nesta fase vou verificando as estratégias que usam de modo a identificar pares com estratégias idênticas e pares com estratégias diferentes a fim de selecionar e estabelecer a ordem das resoluções que serão apresentadas e discutidas na turma no momento coletivo que se segue. Neste momento da aula é pertinente o professor antecipar eventuais dificuldades que os alunos possam ter na resolução da tarefa, assim como antecipar estratégias. Relativamente à questão 2.1 da tarefa, os alunos, como solicitado, desenharão a figura 2 da sequência. É importante identificar o número mínimo de pentágonos necessários para construir uma figura "S", fazer a contagem do número de pentágonos das figuras apresentadas, relacioná-las e identificar a alteração que ocorre que permita encontrar o número de pentágonos da figura 2. Relativamente à questão 2.3, os alunos terão de completar uma tabela sendo necessário descobrir o número de pentágonos da figura 5 , e 6. Os alunos podem fazer a representação de cada figura e respetiva contagem, ter por base uma abordagem recursiva, em que o aluno compara os termos consecutivos, identificando a alteração que ocorre de um termo para o seguinte. Na identificação de pentágonos da figura distante, figura 15 e figura30, os alunos podem pensar em completar a tabela, em desenhar as figuras ou escrever a sequência numérica. É importante que verbalizem o seu raciocínio, que expliquem como é que essas figuras são construídas. Pode-se solicitar que expliquem a um colega como é que a figura 15 é construída, que instruções dariam a um colega para construir a figura 30, pedir aos alunos que indiquem igualdades e diferenças entre determinadas figuras, relacionando-as com as figuras em questão.

**Apresentação, discussão e argumentação:** São selecionados pares para apresentar as suas resoluções em cada questão. Esta seleção incide na identificação prévia de diferentes modos de pensar sobre a sequência ou uso de diferentes modos de representar as suas respostas. Para completar a tarefa e explicar o seu raciocínio podem ser selecionados pares que tenham usado a estratégia de representação e contagem (representação de todos os termos da sequência até ao termo solicitado e contagem dos respetivos elementos); aditiva (tem por base uma abordagem recursiva, o aluno compara termos consecutivos, identificando a alteração que ocorre); objeto inteiro (considera-se um termo de uma dada ordem e com base nesse termo, determina-se o termo de uma ordem múltipla desta); decomposição dos termos (o aluno identifica o processo de construção de uma sequência pictórica, decompõe um termo e estabelece uma relação entre esse termo e a sua ordem, esta estratégia pode ser traduzida por uma expressão algébrica).

. Na questão 2.6, em que os alunos têm de inverter o raciocínio, é importante que distingam que se trata de uma situação diferente da resolvida anteriormente uma vez que o número 24 agora representa o total de pentágonos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de pentágonos. Por um lado alguns alunos podem identificar que existem figuras com qualquer número (natural) desde que seja maior ou igual a 5 e não conseguir determinar a figura a que pertencem 24 pentágonos. Por outro lado, alguns alunos podem já conseguir indicar que para saber o número da figura podem subtrair 4 a 24, retirando o que se mantém constante em cada termo da sequência. Para indicar como obtêm o número de pentágonos qualquer que seja o número da figura podem indicar seguir um pensamento artimético, indicando que de uma figura para a seguinte adicionam um pentágono ou seguir um pensamento de cunho algébrico em que expressam uma relação direta entre o número da figura e o número de pentágonos, podendo usar diferentes representações. Podem indicar em linguagem verbal que o número de pentágonos de uma dada figura é obtido adicionando 4 ao número da figura, podem usar esquemas para expressar essa relação, ou podem usar símbolos (usando um símbolo para representar o número da figura que desconhecem). Dependendo das conclusões a que os alunos conseguem chegar pode representar-se essa relação simbolicamente, evidenciando o significado dos símbolos neste contexto. É importante estabelecer uma analogia com a sequência da tarefa 1, identificar a lei de formação de cada uma delas? Perceber em qual das sequências sentiram maior dificuldade em estabelecer um eventual pensamento algébrico.

**Tarefa 3 - Sequência “Árvores construídas com fósforos”**

**Nome:______________________________________Data:___/___/___**

3. Observa a sequência de figuras construídas com fósforos:

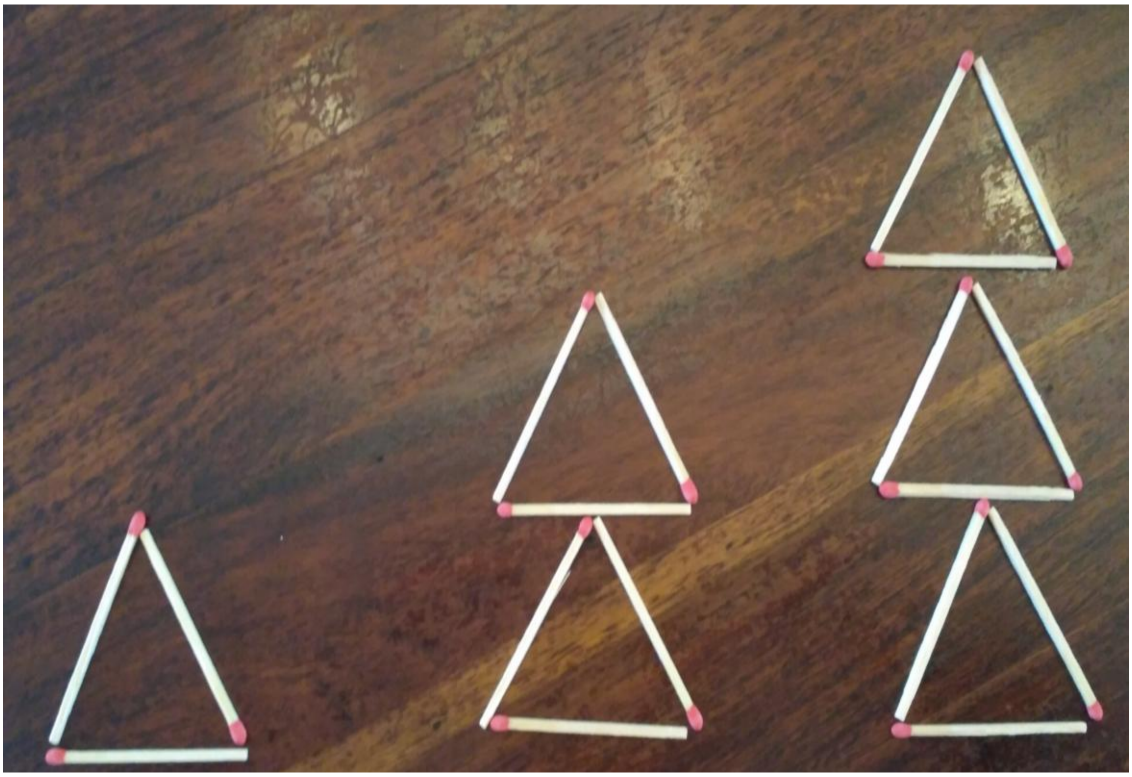


Figura 1 Figura 2 Figura 3

3.1. – Desenha as duas figuras seguintes desta sequência.

3.2. – Indica o número de fósforos que tem cada uma das figuras, a 4.ª e a 5.ª?

3.3. - Descobre o número de fósforos da 10.ª figura. Explica como pensaste.

3.4. -Descobre o número de fósforos da 20.ª figura. Explica como pensaste.

3.5. - Existirá alguma figura com 35 fósforos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

3.6. - Explica como podes descobrir o número de fósforos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número.

**Tarefa 3 - Experiência pedagógica – plano de aula ("Sequência de árvores construídas com fósforos").**

**Tema:** Álgebra (iniciação ao pensamento algébrico)

**Conteúdos:**

- Regularidades – sequências
- Números naturais – relações numéricas
- Múltiplo de um número
- Cálculo mental: produto por "n"
- Divisor de um número; número divisível por outro

**Objetivos:**

- Determinar os termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos.
- Desenvolver a capacidade de identificar relações e de usar linguagem simbólica para as descrever.
- Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e pesquisar regularidades.
- Explorar e investigar sequências pictóricas crescentes.
- Observar sequências pictóricas crescentes e representa-las numericamente.
- Estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas.
- Identificar e determinar os múltiplos de um número.
- Investigar regularidades, explorando a relação das figuras com a sua posição na sequência.
- Explorar as relações entre a ordem de uma figura na sequência e o número de objetos que a constitui.
- Identificar o método de generalização para determinar elementos da sequência que não estão representados.
- Representar, analisar, descrever e generalizar sequências através de palavras, desenhos, tabelas e expressões simbólicas.
- Identificar e justificar a regra de formação da sequência.
- Estabelecer generalizações e apresentá-las oralmente e/ou por escrito

**Recursos:**

- Enunciado para cada grupo.
- Quadro interativo.
- Material escrita.
- Material manipulável (fósforos).

**Orientações para a aula:**

**Organização:** Trabalho em grupos de dois elementos. Os grupos serão constituídos pelos mesmos elementos que exploraram a tarefa 3. Tempo previsto para cada momento da aula (introdução – 5 min.; trabalho autónomo – 25 min.; apresentação e discussão – 40 min.; sistematização das aprendizagens matemáticas – 10min.).

**Introdução:** Nesta fase, para além de sucinto e motivador, explico o trabalho a desenvolver e as etapas do mesmo, informando os elementos de cada grupo do tempo disponível para a realização da tarefa, das regras básicas para a realização de trabalho em pares, da necessidade de se respeitarem e partilharem as ideias. Distribuo o enunciado pelos elementos de cada grupo, onde é dado a conhecer a sequência e respetivas questões. Leio o enunciado projetado no quadro interativo, no sentido de esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir relacionadas com a compreensão de algum vocabulário específico. É importante assegurar que os alunos interpretam corretamente a tarefa no sentido de facilitar o seu envolvimento na mesma. Deve ficar claro para os alunos que podem associar a cada figura o número de fósforos que a constitui e que esse número varia a cada figura. Nesta tarefa, os alunos dispõem de material manipulável (fósforos), o que permite representações ativas.

**Trabalho autónomo:** Durante o trabalho de grupo, circulo pela sala, assumindo o papel de orientador, tentando envolvê-los na tarefa. Além disso, nesta fase, vou verificando as estratégias que usam de modo a identificar grupos com estratégias idênticas e pares com estratégias diferentes afim de selecionar e estabelecer a ordem das resoluções que serão apresentadas e discutidas na turma no momento coletivo que se segue. Neste momento da aula é pertinente o professor prever eventuais dificuldades que os alunos possam ter na resolução da tarefa, assim como antecipar as estratégias a serem utilizadas. Relativamente à questão 3.1 da tarefa, os alunos, como solicitado, desenharão a figura 4 e 5 da sequência. Os diferentes grupos poderão ou não utilizar o material manipulável para responder a esta questão. É importante identificar o número mínimo de fósforos necessários para construir uma figura "árvore construída com fósforos", fazer a contagem do número de fósforos das figuras apresentadas, relacioná-las e identificar a alteração que ocorre que permita encontrar o número de fósforos das figura 4 e 5. Relativamente às questões 3.3 e 3.4., identificação do número de fósforos de figuras distantes, figura 10 e figura 20, os alunos podem pensar em construir uma tabela, em desenhar as figuras, ou em escrever a sequência numérica, tendo por base uma estratégia aditiva ou objeto inteiro, ou eventualmente, por decomposição dos termos. É importante que verbalizem o seu raciocínio, que expliquem como é que essas figuras são construídas. Pode-se solicitar que expliquem a um colega como é que a figura 10 é construída, que instruções dariam a um colega para construir a figura 20, pedir aos alunos que indiquem igualdades e diferenças entre determinadas figuras, relacionando-as com as figuras em questão, de modo a favorecer a sua capacidade de generalização. Na questão 3.5., os alunos terão de utilizar o raciocínio inverso. Poderão construir a sequência, verificando se existe alguma figura com 35 fósforos, validar, utilizando o seu conhecimento dos múltiplos de 3 ou, eventualmente, verificar se 35 é divisível por 3, realizando a divisão e verificando o resto. Na questão 3.6., é pedido que os alunos descubram uma regra que permita descobrir o número de fósforos de qualquer figura. Nesta questão é expetável que os alunos utilizem exemplos, justifiquem por linguagem verbal ou recorram a linguagem simbólica, eventualmente usando símbolos por si criados.

**Apresentação, discussão e argumentação:** São selecionados pares para apresentar as suas resoluções em cada questão. Esta seleção incide na identificação prévia de diferentes modos de pensar sobre a sequência ou uso de diferentes modos de representar as suas respostas. Para completar a tarefa e explicar o seu raciocínio, podem ser selecionados pares que tenham usado a estratégia de representação e contagem (representação de todos os termos da sequência até ao termo solicitado e contagem dos respetivos elementos); aditiva (tem por base uma abordagem recursiva, o aluno compara termos consecutivos, identificando a alteração que ocorre); objeto inteiro (considera-se um termo de uma dada ordem e com base nesse termo, determina-se o termo de uma ordem múltipla desta); decomposição dos termos (o aluno identifica o processo de construção de uma sequência pictórica, decompõe um termo e estabelece uma relação entre esse termo e a sua ordem, esta estratégia pode ser traduzida por uma expressão algébrica, ainda que possa apenas ser expressa pelos alunos em linguagem verbal).

Na questão 3.6, em que os alunos têm de inverter o raciocínio, é importante que distingam que se trata de uma situação diferente da resolvida anteriormente uma vez que o número 35 representa agora o número de fósforos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de fósforos. Para além de eventuais estratégias aditivas, podem verificar se 35 é múltiplo de 3· Alguns alunos podem conseguir indicar que para saber o número da figura basta dividir o número de fósforos por 3. Para indicar como obtêm o número de fósforos, qualquer que seja o número da figura, podem seguir um pensamento aritmético, indicando que de uma figura para a seguinte adicionam três fósforos ou seguir um pensamento de cunho algébrico em que expressam uma relação direta entre o número da figura e o número de fósforos, podendo usar diferentes representações. Podem indicar em linguagem verbal que o número de fósforos de uma dada figura é obtido multiplicando por 3 o número da figura, podem usar esquemas para expressar essa relação, ou podem usar símbolos (usando um símbolo para representar o número da figura que desconhecem). Dependendo das conclusões a que os alunos conseguem chegar pode representar-se essa relação simbolicamente, evidenciando uma vez mais o significado dos símbolos neste contexto.

**Tarefa 4 - "Sequência de degraus que são formados por quadrados"**

**Nome:__________________________________Data:___/___/___**

4. Observa a seguinte sequência em que cada figura representa "degraus" que são formados por quadrados.

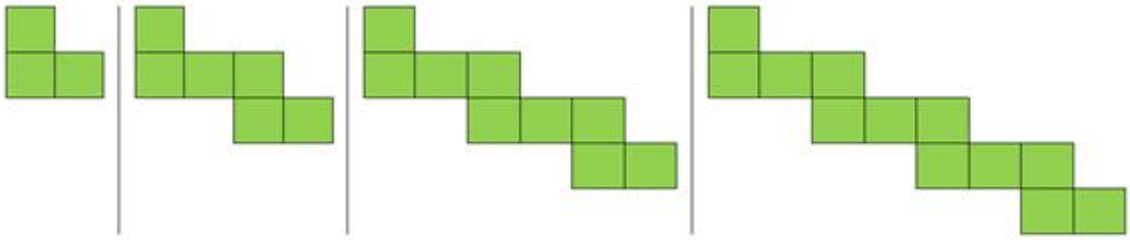


Fig.1 Fig.2 Fig.3 Fig.4

4.1. – Desenha as duas figuras seguintes desta sequência.

4.2. – Indica o número de quadrados que tem cada uma das figuras, a 5.ª e a 6.ª?

4.3. - Descobre o número de quadrados da 12.ª figura. Explica como pensaste.

4.4. -Descobre o número de quadrados da 25.ª figura. Explica como pensaste.

4.5. - Existirá alguma figura com 43quadrados? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

4.6. - Explica como podes descobrir o número de quadrados que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número.

4.7. – Compara o trabalho que fizeste nas duas tarefas. Diz em qual sentiste mais facilidade e explica porquê.

**Tarefa 4 - Experiência pedagógica – plano de aula ("Degraus que são formados por quadrados").**

**Tema:** Álgebra (iniciação ao pensamento algébrico)
**Conteúdos:**
- Regularidades – sequências
- Números naturais – relações numéricas
- Múltiplo de um número
- Divisor de um número; número divisível por outro

**Objetivos:**
- Determinar os termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos.
- Desenvolver a capacidade de identificar relações e de usar linguagem simbólica para as descrever.
- Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e pesquisar regularidades.
- Explorar e investigar sequências pictóricas crescentes.
- Observar sequências pictóricas crescentes e representa-las numericamente.
- Estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas.
- Relacionar sequências com a mesma estrutura linear mas com diferente representação pictórica.
- Identificar e determinar os múltiplos de um número.
- Investigar regularidades, explorando a relação das figuras com a sua posição na sequência.
- Explorar as relações entre a ordem de uma figura na sequência e o número de objetos que a constitui.
- Representar, analisar, descrever e generalizar sequências através de palavras, desenhos, tabelas e expressões simbólicas.
- Identificar e justificar a regra de formação da sequência.
- Estabelecer generalizações e apresentá-las oralmente e/ou por escrito

**Recursos:**
- Enunciado para cada grupo.
- Quadro interativo.
- Material escrita.

**Orientações para a aula:**

**Organização:** Trabalho em grupos de dois elementos. Os grupos serão constituídos pelos mesmos elementos que exploraram a tarefa 3. Tempo previsto para cada momento da aula (introdução – 5 min.; trabalho autónomo – 25 min.; apresentação e discussão – 40min.; sistematização das aprendizagens matemáticas – 10min.).

**Introdução:** Nesta fase, para além de sucinto e motivador, explico o trabalho a desenvolver e as etapas do mesmo, informando os elementos de cada grupo do tempo disponível para a realização da tarefa, das regras básicas para a realização de trabalho em pares, da necessidade de se respeitarem e partilharem as ideias. Distribuo o enunciado pelos elementos de cada grupo, onde é dado a conhecer a sequência e respetivas questões. Leio o enunciado projetado no quadro interativo, no sentido de esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir relacionadas com a compreensão de algum vocabulário específico. É importante assegurar que os alunos interpretam corretamente a tarefa no sentido de facilitar o seu envolvimento na mesma. Deve ficar claro para os alunos que podem associar a cada figura o número de quadrados que a constitui e que esse número varia a cada figura. Nesta tarefa, os alunos não dispõe de material manipulável, o que inviabiliza quaisquer representações ativas.

**Trabalho autónomo:** Durante o trabalho de grupo, circulo pela sala, assumindo o papel de orientador, tentando envolvê-los na tarefa. Além disso, nesta fase, vou verificando as estratégias que usam de modo a identificar grupos com estratégias idênticas e pares com estratégias diferentes afim de selecionar e estabelecer a ordem das resoluções que serão apresentadas e discutidas na turma no momento coletivo que se segue. Neste momento da aula é pertinente prever eventuais dificuldades que os alunos possam ter na resolução da tarefa, assim como antecipar as estratégias a serem utilizadas. Paralelamente a estes aspetos, é também importante verificar se algum grupo estabelece alguma analogia entre esta tarefa e a anterior. Relativamente à questão 4.1 da tarefa, os alunos, como solicitado, desenharão a figura 5 e 6 da sequência. Mais uma vez, torna-se importante identificar o número mínimo de quadrados necessários para construir uma figura "degraus que são formados por quadrados", fazer a contagem do número de quadrados das figuras apresentadas, relacioná-las e identificar a alteração que ocorre que permita encontrar o número de quadrados das figura 5 e 6. Relativamente às questões 4.3 e 4.4., identificação do número de quadrados de figuras distantes, figura 12 e figura 25, os alunos podem pensar em construir uma tabela, em desenhar as figuras, ou em escrever a sequência numérica, tendo por base uma estratégia aditiva ou objeto inteiro, ou eventualmente, por decomposição dos termos. É importante que verbalizem o seu raciocínio, que expliquem como é que essas figuras são construídas. Na questão 4.5., os alunos terão de utilizar o raciocínio inverso. Poderão construir a sequência, verificando se existe alguma figura com 43 quadrados, validar, utilizando os múltiplos de 3 ou, eventualmente, verificar se 43 é divisível por 3. Na questão 4.6., é pedido que os alunos descubram uma regra que permita descobrir o número de quadrados de qualquer figura. Nesta questão é expetável que os alunos utilizem exemplos, justifiquem por linguagem verbal ou recorram a linguagem simbólica .

**Apresentação, discussão e argumentação:** São selecionados pares para apresentar as suas resoluções em cada questão. Esta seleção incide na identificação prévia de diferentes modos de pensar sobre a sequência ou uso de diferentes modos de representação das respostas. Para completar a tarefa e explicar o seu raciocínio, podem ser selecionados pares que tenham usado a estratégia de representação e contagem (representação de todos os termos da sequência até ao termo solicitado e contagem dos respetivos elementos); aditiva (tem por base uma abordagem recursiva, o aluno compara termos consecutivos, identificando a alteração que ocorre); objeto inteiro (considera-se um termo de uma dada ordem e com base nesse termo, determina-se o termo de uma ordem múltipla desta); decomposição dos termos (o aluno identifica o processo de construção de uma sequência pictórica, decompõe um termo e estabelece uma relação entre esse termo e a sua ordem, esta estratégia pode ser traduzida por uma expressão algébrica).

Na questão 4.5, em que os alunos têm de inverter o raciocínio, é importante que distingam que se trata de uma situação diferente da resolvida anteriormente uma vez que o número 43 representa agora o número de quadrados, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de quadrados. Para além de eventuais estratégias aditivas, podem verificar se 43 é múltiplo de 3. Para indicar como obtêm o número de quadrados, qualquer que seja o número da figura, podem seguir um pensamento aritmético, indicando que de uma figura para a seguinte adicionam três quadrados, ou seguir um pensamento de cunho algébrico em que expressam uma relação direta entre o número da figura e o número de quadrados, podendo usar diferentes representações. Podem indicar em linguagem verbal que o número de quadrados de uma dada figura é obtido multiplicando por 3 o número da figura, podem usar esquemas para expressar essa relação, ou podem usar símbolos (usando um símbolo para representar o número da figura que desconhecem). Dependendo das conclusões a que os alunos conseguem chegar pode representar-se essa relação simbolicamente, evidenciando uma vez mais o significado dos símbolos neste contexto.

**Tarefa 5 – Letra “A” com fósforos**

Nome:____________________________________________ Data:___/___/___

5 – Observa a sequência de figuras construídas com fósforos:

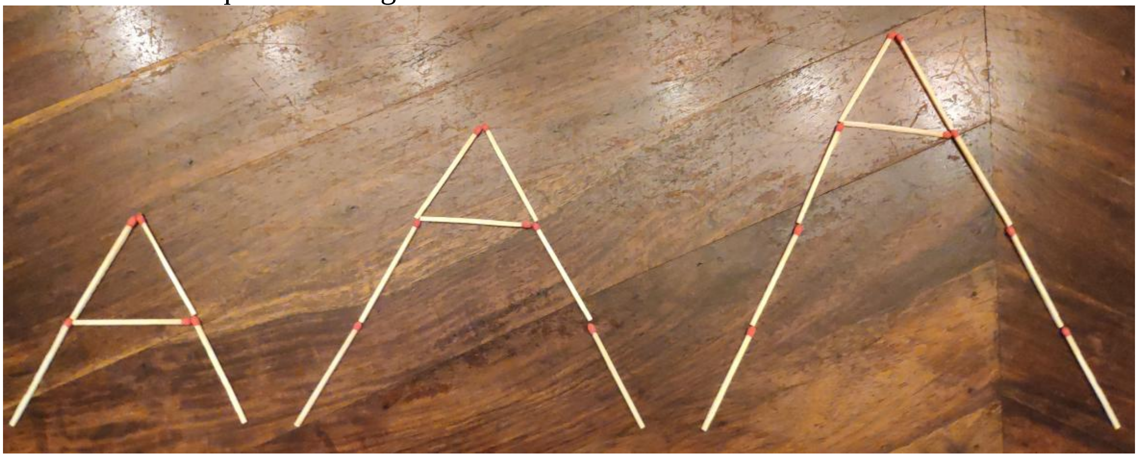


Figura 1 Figura 2 Figura 3

5.1. - Desenha a figura que se segue nesta sequência.

5.2. - Indica o número de fósforos que tem a 4.ª figura.

5.3. – Completa a tabela seguinte:

| Número da figura | Número de fósforos |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

5.4. - Descobre o número de fósforos da 13.ª figura. Explica como pensaste.

5.5. - Descobre o número de fósforos da 35.ª figura. Explica como pensaste.

5.6. – Existirá alguma figura com 43 fósforos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

5.7. Explica como podemos saber o número de fósforos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número.

**Tarefa 5 - Experiência pedagógica – plano de aula (“Letras “A” com fósforos”).**

**Tema:** Álgebra (iniciação ao pensamento algébrico)
**Conteúdos de aprendizagem:**
- Regularidades – sequências
- Números naturais – relações numéricas
- Múltiplo de um número
- Números pares e números ímpares

**Objetivos de aprendizagem:**
- Determinar os termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos.
- Desenvolver a capacidade de identificar relações e de usar linguagem simbólica para as descrever.
- Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e pesquisar regularidades.
- Explorar e investigar sequências pictóricas crescentes.
- Observar sequências pictóricas crescentes e representa-las numericamente.
- Estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas.
- Identificar  e determinar os múltiplos de um número.
- Investigar regularidades, explorando a relação das figuras com a sua posição na sequência.
- Explorar as relações entre a ordem de uma figura na sequência e o número de objetos que a constitui.
- Identificar o método de generalização para determinar elementos da sequência que não estão representados.
- Reconhecer regularidades em sequências e em tabelas numéricas, e formular e testar conjeturas.
- Exprimir oralmente e por escrito, ideias matemáticas e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).
- Representar, analisar, descrever e generalizar sequências através de palavras, desenhos, tabelas e expressões simbólicas.

**Recursos:**
- Enunciado para cada grupo.
- Quadro interativo.
- Material escrita.
- Material manipulável  (fósforos).

**Orientações para a aula:**
**Organização:** Trabalho em grupos de dois elementos. Os grupos serão constituídos pelos mesmos elementos que exploraram as tarefas anteriores. Tempo previsto para cada momento da aula (introdução – 5 min.; trabalho autónomo – 20 min.; apresentação e discussão – 40 min.; sistematização das aprendizagens matemáticas – 10min.).
**Introdução:** Nesta fase, explico o trabalho a desenvolver e as etapas do mesmo, informando os elementos de cada grupo do tempo disponível para a realização da tarefa, das regras básicas para a realização de trabalho em pares, da necessidade de se respeitarem e partilharem as ideias. Distribuo o enunciado pelos elementos de cada grupo, onde é dado a conhecer a sequência e respetivas questões. Leio o enunciado projetado no quadro interativo, no sentido de esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir relacionadas com a compreensão de algum vocabulário específico. É importante assegurar que os alunos interpretam corretamente a tarefa no sentido de facilitar o seu

envolvimento na mesma. Deve ficar claro para os alunos que podem associar a cada figura o número de fósforos que a constitui e que esse número varia a cada figura. Nesta tarefa, os alunos dispõem de material manipulável (fósforos), o que permite representações ativas.
**Trabalho autónomo:** Durante o trabalho de grupo, circulo pela sala, assumindo o papel de orientador, tentando envolvê-los na tarefa. Além disso, nesta fase, vou verificando as estratégias que usam de modo a identificar grupos com estratégias idênticas e pares com estratégias diferentes afim de selecionar e estabelecer a ordem das resoluções que serão apresentadas e discutidas na turma no momento coletivo que se segue. Neste momento da aula é pertinente o professor prever eventuais dificuldades que os alunos possam ter na resolução da tarefa, assim como antecipar as estratégias a serem utilizadas. Relativamente à questão 5.1 da tarefa, os alunos, como solicitado, desenharão a figura seguinte da sequência. Os diferentes grupos poderão ou não utilizar o material manipulável para responder a esta questão. É importante identificar o número mínimo de fósforos necessários para construir uma figura " Letra "A" com fósforos", fazer a contagem do número de fósforos das figuras apresentadas, relacioná-las e identificar a alteração que ocorre que permita encontrar o número de fósforos das figura seguinte. Relativamente à questão 5.3., os alunos preencherão a tabela. Podem recorrer à estratégia representação e contagem, à estratégia aditiva ou decomposição dos termos. Relativamente às questões 5.4. e 5.5., identificação do número de fósforos de figuras distantes, figura 13 e figura 35, é interessante perceber se os alunos continuam a construção da tabela, utilizando a estratégia aditiva ou se reconhecem alguma lei de formação, traduzindo-a em linguagem verbal escrita ou simbólica, por decomposição dos termos. É importante que verbalizem o seu raciocínio, que expliquem como é que essas figuras são construídas. Pode-se solicitar que expliquem a um colega como é que uma determinada figura é construída, que instruções dariam a um colega para construir a figura 30. Pedir aos alunos que indiquem igualdades e diferenças entre determinadas figuras, relacionando-as com as figuras em questão, de modo a favorecer a sua capacidade de generalização. Na questão 5.6., os alunos terão de utilizar o raciocínio inverso. Poderão construir a sequência, verificando se existe alguma figura com 43 fósforos, validar, reconhecendo uma lei de formação dos números ímpares cujo menor termo é constituído por 5 fósforos. Podem eventualmente perceber que, subtraindo 3 fósforos à figura com 43 fósforos e dividindo o resto por 2, obtêm o número da figura. Na questão 5.7., é pedido que os alunos descubram uma regra que permita descobrir o número de fósforos de qualquer figura. Nesta questão é expetável que os alunos utilizem exemplos, justifiquem por linguagem verbal ou recorram a linguagem simbólica, eventualmente usando símbolos por si criados.
**Apresentação, discussão e argumentação:** São selecionados pares para apresentar as suas resoluções em cada questão. Esta seleção incide na identificação prévia de diferentes modos de pensar sobre a sequência ou uso de diferentes modos de representar as suas respostas. Para completar a tarefa e explicar o seu raciocínio, podem ser selecionados pares que tenham usado a estratégia de representação e contagem (representação de todos os termos da sequência até ao termo solicitado e contagem dos respetivos elementos); aditiva (tem por base uma abordagem recursiva, o aluno compara termos consecutivos, identificando a alteração que ocorre); objeto inteiro (considera-se um termo de uma dada ordem e com base nesse termo, determina-se o termo de uma ordem múltipla desta); decomposição dos termos (o aluno identifica o processo de construção de uma sequência pictórica, decompõe um termo e estabelece uma relação entre esse termo e a sua ordem, esta estratégia pode ser traduzida por uma expressão algébrica, ainda que possa apenas ser expressa pelos alunos em linguagem verbal).

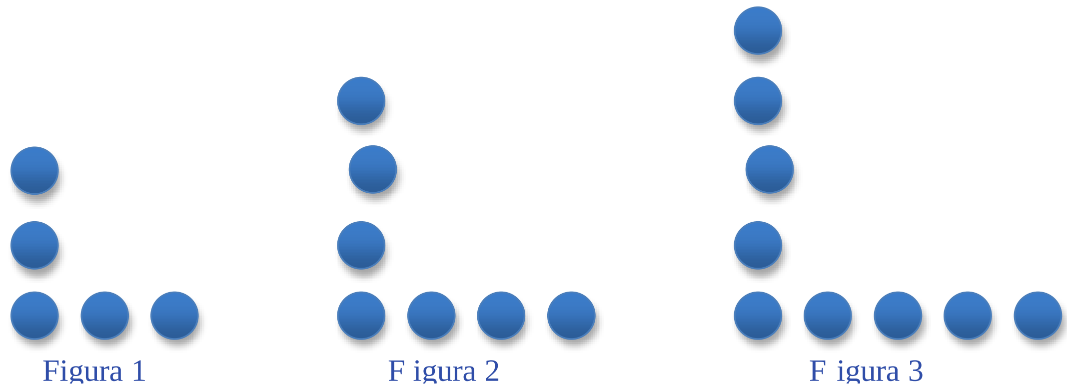
Na questão 5.6., em que os alunos têm de inverter o raciocínio, é importante que distingam que se trata de uma situação diferente da resolvida anteriormente uma vez que o número 43 representa agora o número de fósforos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de fósforos. Para além de eventuais estratégias aditivas, alguns alunos podem conseguir indicar que para saber o número da figura, basta subtrair 3 ao número de fósforos da figura e dividir a diferença por 2.

Para indicar como obtêm o número de fósforos, qualquer que seja o número da figura, podem seguir um pensamento aritmético, indicando que de uma figura para a seguinte adicionam dois fósforos ou seguir um pensamento de cunho algébrico em que expressam uma relação direta entre o número da figura e o número de fósforos, podendo usar diferentes representações. Podem indicar em linguagem verbal que o número de fósforos de uma dada figura é obtido multiplicando por 2 o número da figura e somando sempre 3 (elemento fixo dos diferentes termos) ao produto. Podem reconhecer uma lei de formação, identificando os números ímpares cujo menor termo é constituído por 5 fósforos. Podem ainda usar esquemas para expressar essa relação, ou podem usar símbolos (usando um símbolo para representar o número da figura que desconhecem). Dependendo das conclusões a que os alunos conseguem chegar pode representar-se essa relação simbolicamente, evidenciando uma vez mais o significado dos símbolos neste contexto.

**<u>Tarefa 6 – Sequência “L”</u>**

Nome:____________________________________________________ Data:___/___/___

6 – Observa a seguinte sequência em que cada figura representa a letra “L” que são formados por círculos.




6.1. - Desenha a figura que se segue, ou seja a 4.ª figura desta sequência.

6.2. - Indica o número de círculos que tem a 4.ª figura.

6.3. - Descobre o número de círculos da 9.ª figura. Explica como pensaste.

6.4. - Descobre o número de círculos da 20.ª figura. Explica como pensaste.

6.5. - Existirá alguma figura com 52círculos? Justifica a tua resposta. Se existir diz qual o número dessa figura.

6.6. - Explica como podemos saber o número de círculos que tem uma figura da sequência, qualquer que seja o seu número.

6.7. – Compara o trabalho que fizeste nas duas tarefas. Diz em qual sentiste mais facilidade e explica porquê.

## Tarefa 6 - Experiência pedagógica – plano de aula ("Figuras que representam a letra "L ").

**Tema:** Álgebra (iniciação ao pensamento algébrico)
**Conteúdos de aprendizagem:**
- Regularidades – sequências
- Números naturais – relações numéricas
- Múltiplo de um número
- Números pares e números ímpares

**Objetivos de aprendizagem:**
- Determinar os termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e uma lei de formação através do estudo da relação entre os termos.
- Desenvolver a capacidade de identificar relações e de usar linguagem simbólica para as descrever.
- Elaborar sequências de números segundo uma dada lei de formação e pesquisar regularidades.
- Explorar e investigar sequências pictóricas crescentes.
- Observar sequências pictóricas crescentes e representa-las numericamente.
- Estabelecer conexões entre diferentes conceitos e relações matemáticas.
- Identificar e determinar os múltiplos de um número.
- Investigar regularidades, explorando a relação das figuras com a sua posição na sequência.
- Explorar as relações entre a ordem de uma figura na sequência e o número de objetos que a constitui.
- Identificar o método de generalização para determinar elementos da sequência que não estão representados.
- Reconhecer regularidades em sequências e em tabelas numéricas, e formular e testar conjeturas.
- Exprimir oralmente e por escrito, ideias matemáticas e explicar raciocínios, procedimentos e conclusões, recorrendo ao vocabulário e linguagem próprios da matemática (convenções, notações, terminologia e simbologia).
- Representar, analisar, descrever e generalizar sequências através de palavras, desenhos, tabelas e expressões simbólicas.

**Recursos:**
- Enunciado para cada grupo.
- Quadro interativo.
- Material escrita.

**Orientações para a aula:**

**Organização:** Trabalho em grupos de dois elementos. Os grupos serão constituídos pelos mesmos elementos que exploraram as tarefas anteriores. Tempo previsto para cada momento da aula (introdução – 5 min.; trabalho autónomo – 20 min.; apresentação e discussão – 40 min.; sistematização das aprendizagens matemáticas – 10min.).

**Introdução:** Nesta fase, explico o trabalho a desenvolver e as etapas do mesmo, informando os elementos de cada grupo do tempo disponível para a realização da tarefa, das regras básicas para a realização de trabalho em pares, da necessidade de se respeitarem e partilharem as ideias. Distribuo o enunciado pelos elementos de cada grupo, onde é dado a conhecer a sequência e respetivas questões. Leio o enunciado projetado no quadro interativo, no sentido de esclarecer eventuais dúvidas que possam surgir relacionadas com a compreensão de algum vocabulário específico. É importante assegurar que os alunos interpretam corretamente a tarefa no sentido de facilitar o seu envolvimento na mesma. Deve ficar claro para os alunos que podem associar a cada figura o número de fósforos que a constitui e que esse número varia a cada figura.

**Trabalho autónomo:** Nesta fase, vou verificando as estratégias que usam de modo a identificar grupos com estratégias idênticas e pares com estratégias diferentes afim de selecionar e estabelecer a ordem das resoluções que serão apresentadas e discutidas na turma no momento coletivo que se segue. Neste momento da aula é pertinente o professor prever eventuais dificuldades que os alunos possam ter na resolução da tarefa, assim como antecipar as estratégias a serem utilizadas. Relativamente à questão 6.1 e 6.2. da tarefa, os alunos, como solicitado, desenharão a figura seguinte da sequência. É importante identificar o número mínimo de círculos necessários para construir uma figura " Letra L" fazer a contagem do número de círculos das figuras apresentadas, relacioná-las e identificar a alteração que ocorre que permita encontrar o número de círculos da figura seguinte Na questão 6.2., os alunos terão de explicar como resolveram a questão (se contaram o número de círculos da figura 4 ou se utilizaram alguma estratégia). Relativamente às questões 6.3. e 6.4., identificação do número de círculos de figuras distantes, figura 9 e figura 20, é interessante perceber se os alunos constroem ou sentem necessidade em construir esquemas idênticos a tabelas (como a utilizada na questão 5.3. da tarefa anterior), que remetem para a estratégia aditiva ou se reconhecem alguma lei de formação, traduzindo-a em linguagem verbal escrita ou simbólica, por decomposição dos termos. É importante que verbalizem o seu raciocínio, que expliquem como é que essas figuras são construídas. Pode-se solicitar que expliquem a um colega como é que uma determinada figura é construída, que instruções dariam a um colega para construir a figura "X". Pedir aos alunos que indiquem igualdades e diferenças entre determinadas figuras, relacionando-as com as figuras em questão, de modo a favorecer a sua capacidade de generalização. Na questão 6.5., os alunos terão de utilizar o raciocínio inverso. Poderão construir a sequência, verificando se existe alguma figura com 52 círculos, validar, reconhecendo eventualmente uma lei de formação dos números ímpares cujo menor termo é constituído por 5 círculos. Na questão 6.6., é pedido que os alunos descubram uma regra que permita descobrir o número de círculos de qualquer figura. Nesta questão é expetável que os alunos utilizem exemplos, justifiquem por linguagem verbal ou recorram a linguagem simbólica, eventualmente usando símbolos por si criados.

**Apresentação, discussão e argumentação:** São selecionados pares para apresentar as suas resoluções em cada questão. Esta seleção incide na identificação prévia de diferentes modos de pensar sobre a sequência ou uso de diferentes formas de representar as suas respostas. Para completar a tarefa e explicar o seu raciocínio, podem ser selecionados pares que tenham usado a estratégia de representação e contagem (representação de todos os termos da sequência até ao termo solicitado e contagem dos respetivos elementos); aditiva (tem por base uma abordagem recursiva, o aluno compara termos consecutivos, identificando a alteração que ocorre); objeto inteiro (considera-se um termo de uma dada ordem e com base nesse termo, determina-se o termo de uma ordem múltipla desta); decomposição dos termos (o aluno identifica o processo de construção de uma sequência pictórica, decompõe um termo e estabelece uma relação entre esse termo e a sua ordem, esta estratégia pode ser traduzida por uma expressão algébrica, ainda que possa apenas ser expressa pelos alunos em linguagem verbal).

Na questão 6.6., em que os alunos têm de inverter o raciocínio, é importante que distingam que se trata de uma situação diferente da resolvida anteriormente uma vez que o número 52 representa agora o número de círculos, pretendendo-se saber se alguma figura terá esse número de círculos. Para além de eventuais estratégias aditivas, alguns alunos podem conseguir indicar que para saber o número da figura, basta subtrair 3 ao número de círculos da figura e dividir a diferença por 2.

Para indicar como obtêm o número de círculos, qualquer que seja o número da figura, podem seguir um pensamento aritmético, indicando que de uma figura para a seguinte adicionam dois círculos ou seguir um pensamento de cunho algébrico em que expressam uma relação direta entre o número da figura e o número de círculos, podendo usar diferentes representações. Podem indicar em linguagem verbal que o número de círculos de uma dada figura é obtido multiplicando por 2 o número da figura e somando sempre 3 (elemento fixo dos diferentes termos) ao produto. Podem reconhecer uma lei de formação, identificando os números ímpares cujo menor termo é constituído por 5 círculos. Podem ainda usar esquemas para expressar essa relação, ou podem usar símbolos (usando um símbolo para representar o número da figura que desconhecem). Dependendo das conclusões a que os alunos conseguem chegar pode representar-se essa relação simbolicamente, evidenciando uma vez mais o significado dos símbolos neste contexto.

**Tabela T2 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos "Pá com fósforos". 21/02/2019**

Estratégias (Ponte, Branco e Matos, 2009 ) e Categorização das Generalizações (Radford, 2006

| Questões / Grupos | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Estratégias/Generalizações | | | | | | | |
| 1 | RC | RC | DT | A T | A T | A | A | **AF** |
| 2 | RC | RC | A | DT | DT | DT | DT | **AC** |
| 3 | RC | RC | A | DT | A T | A T | A | **AR** |
| 4 | RC | RC | A | OI | OI | a) | a) | **AR** |
| 5 | RC | RC | A | A T | A T | A T | DT | **AC** |
| 6 | RC | RC | A | DT | DT | A T | A | **AC** |
| 7 | RC | RC | A | A T | A T | RC | A | **AR** |
| 8 | RC | RC | A | A T | A T | A T | A | **AR** |
| 9 | RC | RC | A | A T | A T | A T | DT | **AF** |
| 10 | RC | RC | A | A T | A | A T | A | **AC** |
| 11 | RC | A | A | A T | a) A | A | a) | |
| 12 | RC | RC | A | DT | DT | DT | DT | **AC** |
| 13 | RC | RC | A | A T | A T | A T | A | **AR** |

- Representação e Contagem (RC)
- Aditiva (A)
- Objeto Inteiro (OI)
- Decomposição dos Termos (DT)
- Continuação da tabela – (T)
- Generalização (AR –aritmética; AF – algébrica factual; AC – algébrica contextual; AS – algébrica simbólica)

a) – não explica como pensou/não justifica/não responde

**Tabela T3 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos "Sequência em S" 27/02/201**

Estratégias (Ponte, Branco e Matos, 2009 ) e Categorização das Generalizações (Radford, 2006)

| | Estratégias/Generalizações | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Questões / Grupos | 2.1 | 2.2 | 2.3 | 2.4 | 2.5 | 2.6 | 2.7 |
| 1 | RC | RC | DT | DT | DT | DT | DT **AF** |
| 2 | RC | RC | DT | DT | DT | DT | DT **AF** |
| 3 | RC | RC | A | A T | OI | A T | A **AR** |
| 4 | RC | RC | DT | A | DT | DT | DT **AF** |
| 5 | RC | RC | DT | DT | DT | DT | DT **AC** |
| 6 | RC | RC | A | A T | A T | A T | A **AR** |
| 7 | RC | RC | A | A T | OI | A T | DT **AC** |
| 8 | RC | RC | A | A | A | DT?? | DT **AC** |
| 9 | RC | RC | DT | DT | DT | DT | DT **AF** |
| 10 | RC | RC | A | A | A | DT | DT **AC** |
| 11 | RC | RC | A | A | OI | a) | a) |
| 12 | RC | RC | DT | DT | DT | DT | DT **AC** |
| 13 | RC | RC | A | A T | OI | A | A **AR** |

- Representação e Contagem (RC)
- Aditiva (A)
- Objeto Inteiro (OI)
- Decomposição dos Termos (DT)
- Continuação da tabela – (T)
- Generalização (AR –aritmética; AF – algébrica factual; AC – algébrica contextual; AS – algébrica simbólica)

a) – não explica como pensou/não justifica/não responde

**Tabela T4 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos“Sequência de árvores construídas com fósforos”**
**03/05/2019**

Estratégias (Ponte, Branco e Matos, 2009 ) e Categorização das Generalizações (Radford, 2006)

| | Estratégias / Generalizações | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Questões / Grupos | 3.1 | 3.2 | 3.3 | 3.4 | 3.5 | 3.6 |
| 1 | RC | RC | OI | OI | A | A AR |
| 2 | RC | DT | DT | DT | DT | DT AC |
| 3 | RC | RC | A | A | A | A AR |
| 4 | RC | A | DT | DT | DT | a) |
| 5 | RC | RC | DT | OI | DT | a) |
| 6 | RC | RC | RC | OI | a) | DT AC |
| 7 | RC | RC | DT | DT | a) | DT AC |
| 8 | RC | RC | A | A | A | A AR |
| 9 | RC | RC | DT | OI | DT | DT AF AC |
| 10 | RC | RC | A | OI | A | DT AC AF |
| 11 | RC | RC | DT | DT | DT | DT AC |
| 12 | RC | RC | DT | DT | DT | DT AC |
| 13 | RC | DT | DT | DT | DT | DT AC |

- Representação e Contagem (RC)
- Aditiva (A)
- Objeto Inteiro (OI)
- Decomposição dos Termos (DT)
- Continuação da tabela – (T)
- Generalização (AR – aritmética; AF – algébrica factual; AC – algébrica contextual; AS – algébrica simbólica)

a) – não explica como pensou/não justifica

**Tabela T5 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos "Sequências de degraus que são formados por quadrados"**

**08/05/2019**

Estratégias (Ponte, Branco e Matos, 2009 ) e Categorização das Generalizações (Radford, 2006)

| Grupos \ Questões | Estratégias | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 4.1 | 4.2 | 4.3 | 4.4 | 4.5 | 4.6 | Observações |
| 1 | RC | DT | DT | DT | DT | DT AC | 2ª tarefa porque perceberam melhor |
| 2 | RC | RC | DT | DT | DT | DT AC | 1ª tarefa mais fácil – ajuda representações ativas |
| 3 | RC | DT | A | A | A | DT AC | Ambas fáceis |
| 4 | RC | RC | DT | DT | DT | DT AC | 1ª tarefa . mais fácil - representações ativas |
| 5 | RC | RC | DT | DT | DT | DT AC | 2ª tarefa mais fácil, "contas" mais fáceis |
| 6 | RC | RC | DT | DT | DT | DT AC | 1ª tarefa – representações ativas |
| 7 | RC | RC | DT | DT | A | DT AF;AC | Ambas fáceis |
| 8 | RC | RC | OI | A | A | DT AC | 2ª tarefa, mais fácil de contar os quadrados |
| 9 | RC | RC | DT | DT | DT | DT AF;AC | 2ª tarefa pois a anterior ajudou esta resolução |
| 10 | RC | A | DT | DT | DT | DT AC | a) |
| 11 | RC | RC | DT | DT | A | DT AF | 2ª tarefa mais fácil |
| 12 | RC | DT | DT | DT | DT | DT AC | 2ª tarefa mais fácil |
| 13 | RC | RC | OI | A | DT | DT AC | 2ª tarefa mais fácil |

- Representação e Contagem (RC)
- Aditiva (A)
- Objeto Inteiro (OI)
- Decomposição dos Termos (DT)
- Continuação da tabela – (T)
- Generalização (AR – aritmética; AF – algébrica factual; AC – algébrica contextual; AS – algébrica simbólica)

a) – não explica como pensou/não justifica

**Tabela T6 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos “Sequência letras “A” com fósforos”**

**22/05/2019**

Estratégias (Ponte, Branco e Matos, 2009 ) e Categorização das Generalizações (Radford, 2006)

| | Estratégias | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Questões / Grupos | 5.1 | 5.2 | 5.3 | 5.4 | 5.5 | 5.6 | 5.7 | |
| 1 | RC | A | A | A<br>T | OI | A | A | AR |
| 2 | RC | DT | A | DT | DT | DT | DT | AR |
| 3 | RC | A | A | A<br>T | A<br>T | A | DT | AC |
| 4 | RC | RC | A | OI A | DT | A | A | AR |
| 5 | RC | A | A | A | A | A | A | AR |
| 6 | RC | DT | A | A<br>T | A<br>T | A<br>T | DT | AF/AC |
| 7 | RC | RC | A | A<br>T | A<br>T | A<br>T | A | AR |
| 8 | RC | A | A | A<br>T | A<br>T | A<br>T | DT | AC |
| 9 | RC | RC | A | OI | OI | A | A | AR |
| 10 | RC | A | A | A | A | A | A | AR |
| 11 | RC | A | A | A<br>T | OI | OI | A | AR |
| 12 | RC | RC | DT | DT | DT | DT | DT | AC |
| 13 | RC | RC | A | A<br>T | OI | A | A | AR |

- Representação e Contagem (RC)
- Aditiva (A)
- Objeto Inteiro (OI)
- Decomposição dos Termos (DT)
- Continuação da tabela – (T)
- Generalização (AR – aritmética; AF – algébrica factual; AC – algébrica contextual; AS – algébrica simbólica)

a) – não explica como pensou/não justifica

## Tabela T7 - Estratégias utilizadas pelos diversos grupos “Sequência letras “L” que são formadas por círculos”

**24/05/2019**

| | Estratégias | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Questões / Grupos | 6.1 | 6.2 | 6.3 | 6.4 | 6.5 | 6.6 | Tarefa 6 considerada mais fácil |
| 1 | RC | A | A T | A T | a) | DT AC | Tarefa 6 porque perceberam melhor |
| 2 | RC | DT | DT | DT | a) | DT AC | tarefa 5 mais fácil – ajuda representações ativas |
| 3 | RC | RC | A T | A T | A T | DT AC | Tarefa 6, pois havia conhecimentos prévios. |
| 4 | RC | RC | A T | A T | a) | DT AC | Tarefa 6, já sabiam fazer |
| 5 | RC | DT | DT | DT | DT | DT AC | Tarefa 6 mais fácil |
| 6 | RC | RC | A T | A T | A T | DT AC | Tarefa 6 |
| 7 | RC | RC | DT | DT | a) | DT AC | Tarefa 5 |
| 8 | RC | DT | DT | DT | A T | DT AC | Tarefa 6, mais fácil de contar os círculos |
| 9 | RC | RC | RC | A T | A T | DT AF | Tarefa 6, já tinham conhecimentos anteriores |
| 10 | RC | RC | A T | A T | A T | DT AF | Em ambas |
| 11 | RC | DT | DT | DT | DT | DT AC | Tarefa 6 |
| 12 | RC | RC | DT | DT | a) | DT AF/AC | Tarefa 6 |
| 13 | RC | RC | A T | A T | a) | a) | Tarefa 6 |

- Representação e Contagem (RC)
- Aditiva (A)
- Objeto Inteiro (OI)
- Decomposição dos Termos (DT)
- Continuação da tabela – (T)
- Generalização (AR – aritmética; AF – algébrica factual; AC – algébrica contextual; AS – algébrica simbólica)

a) – não explica como pensou/não justifica

Diário de Bordo – tarefa

| | | |
|---|---|---|
| Data: | Tempo previsto: | Tempo gasto: |
| Tarefa: Sequência | | |

| **Antes da aula** |
|---|
| |

| **Durante a aula** |
|---|
| **Introdução da tarefa** |
| |
| **Desenvolvimento da tarefa** |
| |

| Discussão geral |
| --- |
| |

| Após a aula |
| --- |
| |

Diário de bordo adaptado de Branco, N. (2008) e de Morais, A. (2012)

Autorizações

Exmo. Sr. Diretor do Agrupamento de [redacted]

Eu, Gonçalo Cordeiro, mestrando em educação matemática, venho por este meio solicitar autorização para concretizar com o grupo de alunos da turma 4[redacted] da Escola [redacted] o trabalho que dará suporte ao meu relatório de Mestrado, com o tema **" Capacidade de generalização em sequências crescentes com estruturas pictóricas em alunos de 4º ano "**. Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação na Área de Especialização em Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Falei com a professora titular da turma, a professora [redacted], expliquei-lhe o objetivo do projeto, pelo que aceitou participar no projeto.

No decorrer do trabalho, as principais formas de recolha de dados para a concretização do mesmo serão: observações, intervenção pedagógica, gravação de aúdio/vídeo, narração escrita de momentos das entrevistas e recolha dos trabalhos produzidos pelos alunos. Será solicitada autorização aos Encarregados de Educação dos alunos para a participação neste trabalho e será salvaguardado o anonimato de todos os alunos.

Anexo a Carta Ética do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Grato pela colaboração, os melhores cumprimentos,

Pede deferimento,

Exmo.(a). Sr.(a). Encarregado(a) de Educação:

Usar a linguagem simbólica algébrica é uma importante capacidade a ser desenvolvida pelos alunos no âmbito da educação matemática. É neste tópico que muitas dificuldades de compreensão surgem e podem influenciar o desempenho matemático dos estudantes. Assim, com o objetivo de compreender como é que alunos de 4.º ano, com desempenhos académicos distintos, analisam e generalizam sequências pictóricas crescentes, que têm subjacentes diferentes estruturas matemáticas e também distintas estruturas pictóricas, eu, Gonçalo Cordeiro, mestrando em educação matemática, realizarei um projeto com os alunos da turma 4º[redacted] da Escola [redacted]Este trabalho integra-se no âmbito do curso de Mestrado em Educação na Área de Especialização de Didática da Matemática, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa e conta com o apoio da professora [redacted].

Para concretizar este projeto será necessário proceder a várias intervenções pedagógicas na sala de aula, com gravação de áudio/vídeo (1) e a recolha de tarefas realizadas pelos alunos durante as intervenções que ocorrerão no período de fevereiro a maio de 2019.

Assim sendo, e tendo em conta que é garantido o anonimato dos alunos e que todos os registos áudio/vídeo serão utilizados exclusivamente na investigação, torna-se fundamental ter o seu consentimento para a participação do seu educando neste estudo.

Por fim, informo que estou à sua inteira disposição para prestar qualquer tipo de esclarecimento.

[redacted], 25 de janeiro de 2019
Agradeço a sua colaboração.
Com os melhores cumprimentos
Gonçalo Cordeiro,
______________________
Email: g.cordeiro@campus.ul.pt

(Recortar por aqui) -----------------------------------------------------------------------------------------------

Declaro que concordo que o meu educando_____________________________ número _____ da turma 4ºA da Escola EB.1 José Tagarro participe neste estudo desenvolvido pelo professor Gonçalo Cordeiro.

(1)Autorizo/Não autorizo a gravação de áudio/vídeo da entrevista (riscar o que não interessa).

Data:______________Assinatura: _____________________________________